# START

# GUIDE TO CONTENTS

| MASTER NEGATIVE # | AUTHOR | TITLE |
|---|---|---|
| 91-80007-1 | HONTHEIM, JOSEPH | DER LOGISCHE ALGORITHMUS IN SEINEM WESEN, IN SEINER ANWENDUNG UND IN SEINER PHILOSOPHISCHEN BEDEUTUNG. |
| 91-80007-2 | LACHMANN, KARL | DE CHORICIS SYSTEMATIS TRAGICORUM GRAECORUM LIBRI QUATTUOR. |
| 91-80007-3 | LEWES, LOUIS | GOETHES FRAUENGESTALTEN. |
| 91-80007-4 | MASARYK, TOMAS GARRIGUE | THE SPIRIT OF RUSSIA; STUDIES IN HISTORY, LITERATURE AND PHILOSOPHY. |

*MASTER*
*NEGATIVE*
*NO. 91-80007-1*

MICROFILMED 1991

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES/NEW YORK

as part of the
"Foundations of Western Civilization Preservation Project"

Funded by the
NATIONAL ENDOWMENT FOR THE HUMANITIES

Reproductions may not be made without permission from
Columbia University Library

# COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States -- Title 17, United States Code -- concerns the making of photocopies or other reproductions of copyrighted material...

Columbia University Library reserves the right to refuse to accept a copy order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

*AUTHOR:*

# HONTHEIM, JOSEPH

*TITLE:*

# LOGISCHE ALGORITHMUS

*PLACE:*

# BERLIN

*DATE:*

# 1895

Master Negative #

91-80007-1

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DEPARTMENT

**BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET**

Original Material as Filmed - Existing Bibliographic Record

164
H75

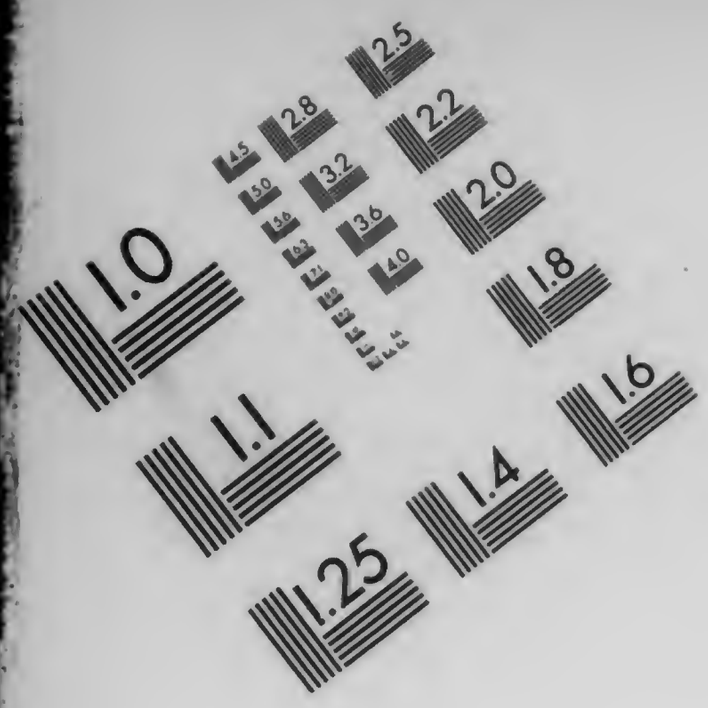
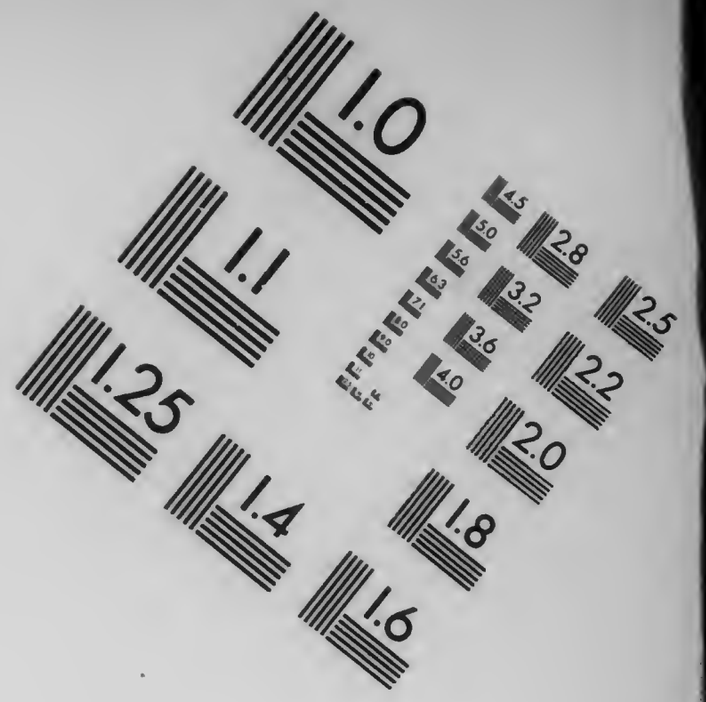
Hontheim, Joseph.
Der logische algorithmus in seinem wesen, in seiner anwendung und in seiner philosophischen bedeutung.
Berlin, 1895. O. [5]+54 p.

151492

Restrictions on Use:

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35 mm REDUCTION RATIO: 12x
IMAGE PLACEMENT: IA IIA IB IIB
DATE FILMED: 4/3/91 INITIALS F.C.
FILMED BY: RESEARCH PUBLICATIONS, INC WOODBRIDGE, CT

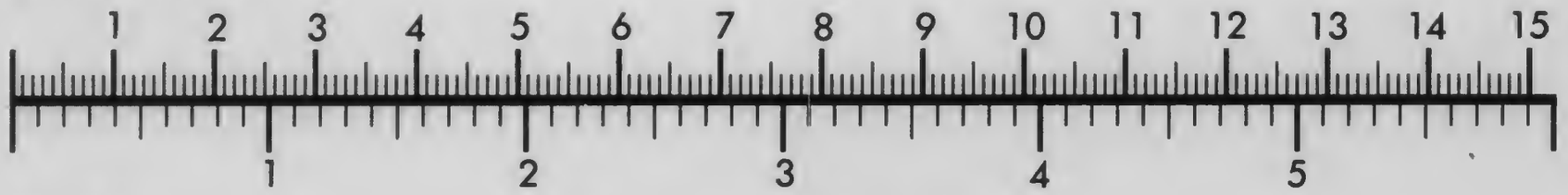
AIIM

Association for Information and Image Management

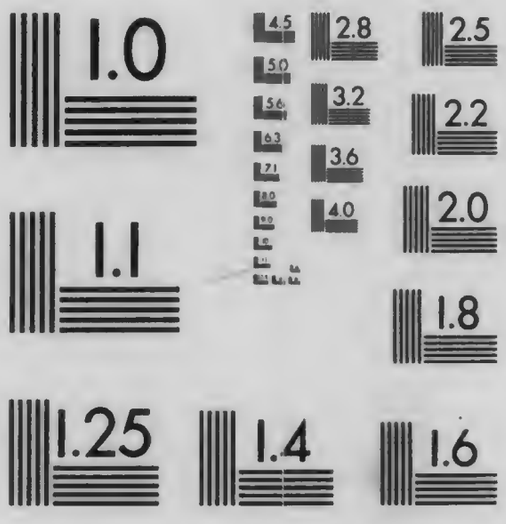
1100 Wayne Avenue, Suite 1100
Silver Spring, Maryland 20910

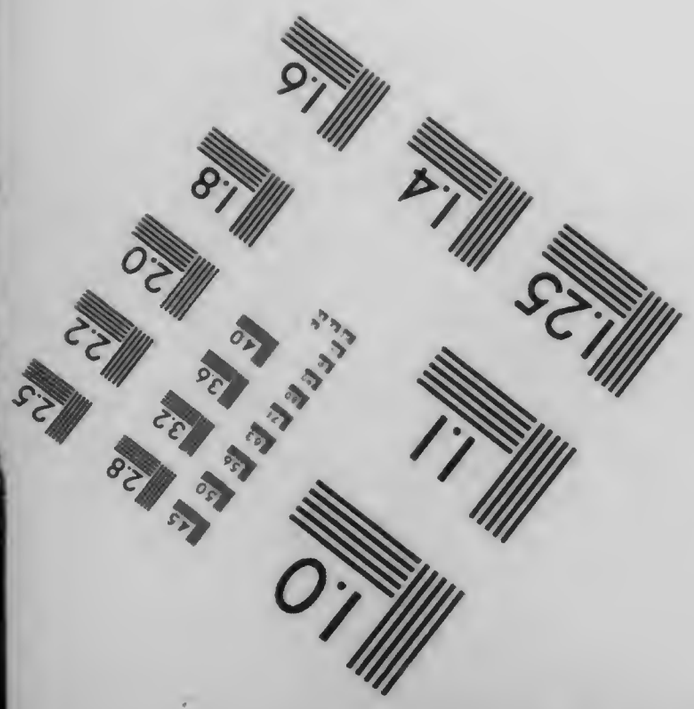
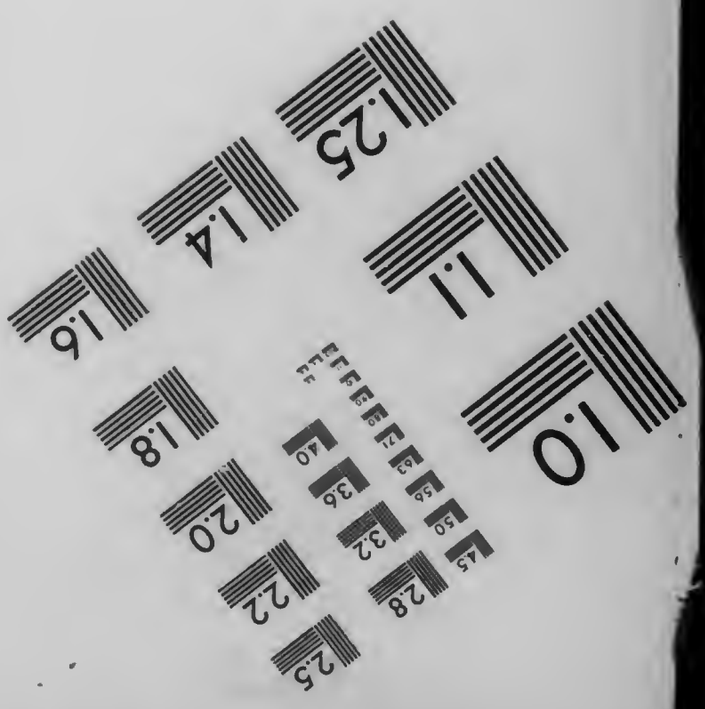
301/587-8202

Centimeter




Inches



MANUFACTURED TO AIIM STANDARDS
BY APPLIED IMAGE, INC.

164 H75

Columbia College
in the City of New York.
Library.

From the Bequest
of
F. A. P. Barnard, LL. D.
Pres. of Columbia College, 1864-1889.
and
Mrs. M. M. Barnard.

COLUMBIA
COLLEGE
LIBRARY. N.Y.

# DER LOGISCHE ALGORITHMUS

IN SEINEM WESEN,

IN SEINER ANWENDUNG UND IN SEINER

PHILOSOPHISCHEN BEDEUTUNG

VON

**JOSEPH HONTHEIM**, S. J.

BERLIN.
VERLAG VON FELIX L. DAMES.
3 KOCH-STRASSE 3.
1895.

COLUMBIA
COLLEGE
LIBRARY N.Y.

# VORREDE.

Die vorliegende Arbeit wurde für einige Freunde vor etwa zehn Jahren fertig gestellt. Da sie vieles zu enthalten scheint, was wissenschaftliche Kreise, besonders die Philosophen und zum Teil die Mathematiker, interessieren dürfte, so tritt sie jetzt in die Oeffentlichkeit. Es wurden aber vorher einige kleine Aenderungen am Manuskripte vorgenommen und namentlich an mehreren Stellen auf Schröders seitdem (1890) erschienenes bedeutendes Werk »Algebra der Logik« nachträglich Bezug genommen.

Zum Verständnis der vorliegenden Schrift sind sozusagen gar keine mathematischen Vorkenntnisse erforderlich. Für diejenigen, welche sich zunächst nicht das ganze System der Rechnung zu eigen machen können, ist zu beachten, dass die sechs ersten Abschnitte durchgenommen werden müssen, wenn man überhaupt eine wahre Vorstellung von der logischen Rechnung sich bilden will. Doch sind auch Kapitel VIII, X, XII, XIV, XX recht wichtig; in dem letztern gipfelt eigentlich der ganze Algorithmus. Philosophisch interessant sind besonders Kapitel VII, IX, XVII, XIX, XX, XXIV, XXV. — Die Darstellung ist kurz und möglichst deutlich gehalten. Möge es gelungen sein, den Gegenstand so zu behandeln, dass auch der mathematisch weniger geübte Philosoph sich einen klaren Begriff von seinem Wesen und seiner Bedeutung zu bilden vermag.

FEB 7 1896 SL-40636

215431

# INHALT.


| | | Seite |
|---|---|---|
| | Einleitung | 1 |
| I. | Zeichenerklärungen | 4 |
| II. | Grundsätze | 7 |
| III. | Kommutations- und Distributionsgesetze | 8 |
| IV. | Tautologiegesetze | 12 |
| V. | Ontologiegesetze | 13 |
| VI. | Negationsgesetze | 15 |
| VII. | Dualitätsgesetz | 16 |
| VIII. | Absorptionsgesetze | 17 |
| IX. | Funktionslehre | 21 |
| X. | Die Entwickelung der Summen | 25 |
| XI. | Die Reduktion der Summen | 28 |
| XII. | Die Aequivalenz der logischen Gleichungen | 30 |
| XIII. | Die Interpretationsgesetze der Gleichungen | 31 |
| XIV. | Das zusammengesetzte Aequivalenzgesetz | 33 |
| XV. | Die Verwandlung der Urteile in Gleichungen | 34 |
| XVI. | Die Verwandlung der Gleichungen in Urteile | 35 |
| XVII. | Prüfung des gegenseitigen Verhältnisses der Urteile durch den Kalkül | 36 |
| XVIII. | Allgemeiner Gebrauch des Algorithmus zu Einteilungen | 38 |
| XIX. | Beleuchtung der Konversion und Opposition der Urteile | 38 |
| XX. | Schlussfolgerung durch logische Rechnung | 40 |
| XXI. | Einteilung der Begriffe mit Hilfe der Nullgleichung | 44 |
| XXII. | Die logische Rechnung und der Syllogismus | 45 |
| XXIII. | Vorzüge unseres Verfahrens zur Lösung gestellter Aufgaben | 46 |
| XXIV. | Verschiedene Fragen | 48 |
| XXV. | Wissenschaftlicher Wert des logischen Algorithmus | 50 |

COLUMBIA
COLLEGE
LIBRARY N.Y.

# Einleitung.

Die Gedanken sind Zeichen und Bilder der Dinge. Diese inneren Symbole bedürfen aber selbst wiederum einer äussern Darstellung; wir brauchen Zeichen von Zeichen, soll die Wissenschaft sich ausbilden und fortschreiten. Die Natur selbst hat dem Menschen in der Geberde, und besonders in der Sprache, ein Mittel gegeben, seine Begriffe leicht und passend in Zeichen zu äussern. Das Zeichen unterscheidet und fixiert die sonst zerfliessenden Begriffe; es löst sie vom sinnlichen Eindruck los, begünstigt die Abstraktion und Verallgemeinerung; es vereinfacht die Vorstellungen, indem oft einige Silben den kompliziertesten Gedanken hinreichend vertreten; es erleichtert deshalb den Gebrauch der Begriffe zu neuen Verbindungen und Forschungen; es hilft dem Gedächtnis; es setzt uns endlich in den Stand mit andern in jenen geistigen Austausch zu treten, ohne den eine intellektuelle Entwickelung des einzelnen Menschen, und mehr noch der Menschheit, so gut wie unmöglich ist.

Doch die Sprache genügt keineswegs unserm Bedürfnis nach Zeichen. Mit dem Worte verbindet sich die Schrift, diese erhabene Erfindung menschlichen Scharfsinns. Ist das Wort ein Zeichen der Zeichen, so ist der Buchstabe ein Zeichen des Wortes, d. h. ein Zeichen von Zeichenzeichen. Durch die Schrift tritt das Auge zum Ohr, um den Eindruck zu verstärken und das Gedächtnis zu beleben. Ja die Schrift ersetzt geradezu in weitem Umfange das Gedächtnis; sie lässt nicht untergehen, was der Erinnerung entfällt. Weiterhin teilt sich der Gedanke beim langsamen Schreiben. Der Gedanke tritt aus uns heraus; er stellt sich vor das Auge; er wird sichtbar, greifbar, bleibend; man kann ihn mit Musse beschauen, bearbeiten, bilden, glätten. Durch die Schrift sprechen wir mit allen Menschen auf dem Erdkreise; durch sie leben Plato und Aristoteles, Augustinus und Thomas selbst im Grabe noch; durch sie wird auch den kommenden Geschlechtern nützen, was heute die menschliche Forschung ausfindet. Das Buch, die Bibliothek ist vielleicht

COLUMBIA
COLLEGE
LIBRARY

mehr noch, als die Tradition, das allgemeine Gedächtnis der Menschheit. Ohne Bücher müsste jeder Philosoph so ziemlich von vorn anfangen, alles aus sich wie zum ersten Male konstruieren; — was sollte da wohl herauskommen? Mit Hilfe des Buches aber arbeiten Jahrhunderte und Jahrtausende organisch an der Entwickelung desselben Gedankens, bis sie ihn zur definitiven Lösung geführt.

Hierbei beruhigt sich das Verlangen nach Zeichen keineswegs; dieser Hunger scheint unersättlich. Ich will mich nicht aufhalten bei den Noten der Musik; ich denke auch nicht daran, wie vergleichende Sprachwissenschaft, Physiologie und Tachygraphie um Auffindung einer allgemeinen, deutlichen, gefälligen und schnellen Schrift rastlos sich bemühen; ich komme vielmehr zu Zeichen, wie wir sie in unsern Ziffern, in den Symbolen der Algebra und Mathematik überhaupt, in den Formeln der Chemie und Mineralogie besitzen.

Das gesprochene und geschriebene Wort ist, wie die Logiker sagen, ein zufälliges oder konventionelles Zeichen; es besteht kaum ein inneres Verhältnis zwischen dem Zeichen und dem vorgestellten Gegenstande. Was wäre nicht erreicht, könnten wir Zeichen aufs Papier werfen, welche das Wesen des Inhaltes der Vorstellungen gleichsam abmalten, so dass die Betrachtung des Zeichens zu neuen Untersuchungen einladet und zu neuen Resultaten drängt? Was sieht der Mathematiker nicht alles in einer Gleichung? was der Chemiker in seiner Molekularformel? Lassen sich vielleicht alle Begriffe durch solche Ideogramme und begleitende Worte sachgemäss versinnlichen?

Leibniz hat sich viel mit diesem Gedanken beschäftigt. Er hielt es für möglich und wünschenswerth, einen Katalog aller einfachen Begriffe zu entwerfen, sie durch Symbole zu versinnlichen, und durch ihre Zusammensetzung alle übrigen Begriffe darzustellen. Eine solche Schrift wäre für alle Menschen ohne Unterschied der Sprache verständlich; sie würde ungemein beitragen zur Klärung, Schärfung und Fixierung der Gedanken. Mit dieser Schrift müsste ein logisches Kombinations- und Rechnungsverfahren in Verbindung treten; so käme man leicht und sicher zu neuen Resultaten im Reiche des Gedankens*). Leibniz dachte also an ein philosophisches Volapük und an eine logische Algebra. Eine allgemeine Zeichensprache nun, wie Leibniz sie meint, dürfte nicht bloss schwierig, sondern auch unmöglich sein. Zwar zeigt das Beispiel der Chemie, dass in dieser Richtung Erstaunliches geleistet werden kann. Solche Bezeichnungen sind aber erst möglich, wenn man die

*) Ueber Leibnizens characteristica universalis und über ähnliche Versuche vor ihm bei Raimundus Lullus, Athanasius Kircher S. J., Johann Joachim Becher, Georg Dalgarn und John Wilkins, sowie über die anonym erschienenen »Vorschläge zu einer nöthwendigen Sprachlehre« von Ludwig Benedikt Trede 1811, vergleiche Trendelenburg, Histor. Beitr. z. Philosophie, 3. Bd. S. 1—63.



Natur der Dinge hinreichend erkannt hat; man kann aber nicht zuerst Zeichen aufstellen, um aus ihnen durch Kombination und Rechnung das Wesen der Dinge zu erschliessen. Wenn freilich die Wissenschaft genügend vorgedrungen ist, um passende Zeichen entwerfen zu können, so werden die Zeichen hinwiederum das schätzenswertheste Instrument für weitere Forschungen und Entdeckungen; besonders dienen sie dann auch zur Mitteilung des Gefundenen an Andere.

Wegen der Schwierigkeit und Unmöglichkeit des Unternehmens haben sich auch die Philosophen wenig mit Bildung einer Weltsprache befasst. Dagegen hat der Gedanke eines logischen Algorithmus besonders in neuerer Zeit vielfach Berücksichtigung gefunden. George Boole hat hier Bahn gebrochen*). Jevons, Grassmann, Peirce und Ernst Schröder haben erfolgreich weiter gebaut. Auch die Handbücher der Logik schenken bereits ziemlich allgemein diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit. Mit diesem logischen Algorithmus werden sich die folgenden Zeilen befassen. Sie werden die Methode der logischen Rechnung darlegen und dieselbe auf den von Boole und Andern gelegten Grundlagen weiter entwickeln, als dies bisher geschehen ist.

*) Sein Hauptwerk ist: An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London 1854. Von andern Autoren nennen wir: R. Grassmann, Die Begriffslehre oder Logik (2. Buch der Formenlehre oder Mathematik), Stettin 1872; J. Delboeuf, Logique algorithmique, Liège et Bruxelles 1877; Stanley Jevons, The principles of science, 2. edit. London and New-York 1877; Charles Peirce und seine Schule in verschiedenen amerikanischen Zeitschriften; Ernst Schröder, Der Operationskreis des Logikkalküls, Leipzig 1877; O. Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnislehre, Berlin 1877. Ganz neuerdings ist erschienen: Ernst Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, Leipzig 1890 und 1891. Man findet dort ein sehr reichhaltiges Litteraturverzeichnis über unsern Gegenstand.

## I. Zeichenerklärungen.

1. Die Merkmale der Dinge bezeichnen wir mit den lateinischen Buchstaben a, b, c . . . Oder vielmehr a bezeichnet die Gesamtheit der Dinge, welche das Merkmal a haben; a bezeichnet nicht die einzelnen Dinge, sondern die ganze Klasse, die Kollektion der Dinge, welche das Merkmal a besitzen; a bezeichnet den Umfang des Begriffs, nicht seinen Inhalt (diesen Inhalt deutet es nur an). — Wir nennen a im Folgenden kurzweg einen Begriff oder Term oder Symbol oder Zeichen.

2. Der kontradiktorische Gegensatz wird durch ein Minuszeichen über dem Buchstabensymbol bezeichnet. Also ist $\bar{a}$ [gelesen: Nicht - a oder a - nicht oder a - Strich] die Gesamtheit der Dinge, welche das Merkmal a nicht besitzen.

3. Das Produkt a b bezeichnet die Gesamtheit der Dinge, welche beide Merkmale a und b zugleich besitzen. a b c bezeichnet die Klasse der Dinge, welche zugleich a, b und c sind. Bedeutet a weiss oder die Klasse der weissen Dinge, b Schaf, so ist a b die Kollektion der Wesen, welche weiss und Schaf sind, d. h. a b ist die Gesamtheit der weissen Schafe.

4. Die Summe $a + b$ bezeichnet die Gesamtheit der Dinge, welche das Merkmal a oder das Merkmal b (oder auch beide zugleich) besitzen. In ähnlicher Weise stellt $a + b + c$ die Kategorie der Dinge dar, welche eines oder mehrere der Merkmale a, b und c besitzen.

Der Ausdruck $a + b$ bedeutet also: die Klasse der Wesen, welche a oder b sind; dabei ist die Partikel »oder« nicht im streng disjunktiven, sondern im weitesten Sinne zu nehmen. Wir wollen Beispiele geben. Bezeichnet a die spitzwinkligen, b die stumpfwinkligen Dreiecke, so bedeutet $a + b$ die schiefwinkligen Dreiecke d. h. jedes Dreieck, welches spitzwinklig oder stumpfwinklig ist. Bezeichnet a die Kryptogamen, b die Gefässpflanzen, so bezeichnet $a + b$ das gesamte Pflanzenreich d. h. jede Pflanze, welche kryptogam ist oder Gefässpflanze (oder beides zugleich). Wenn der belagernde Feldherr seinen Soldaten befiehlt, sie sollten aus der Stadt alle



Personen durchlassen, welche weiblichen Geschlechtes (a) oder Kinder (b) sind, so heisst die Klasse der durchzulassenden Personen $a + b$; dazu gehören natürlich auch die kleinen Mädchen, welche Kinder und weiblichen Geschlechts zugleich (a b) sind. Die Klasse a b ist also in der Klasse $a + b$ enthalten. Bezeichnet endlich a die gleichwinkligen Dreiecke, b die gleichseitigen, so bezeichnet $a + b$ das regelmässige Dreieck d. h. jedes Dreieck, welches gleichseitig oder gleichwinklig ist; es ist freilich jedes gleichseitige Dreieck auch gleichwinklig und umgekehrt, es ist in diesem besondern Beispiele $a = b = a + b = a\,b$.

5. Die Gleichung $a = b$ besagt, dass die Gesamtheit der Dinge mit dem Merkmal a nicht verschieden ist von der Gesamtheit der Dinge mit dem Merkmal b; a und b decken sich. Mit andern Worten: Jedes a ist b und jedes b ist a. Oder auch: Wenn a ist, so ist b, und wenn b ist, so ist a.

Man kann nicht genug betonen, dass die Gleichung $a = b$ nicht bloss besagt: »Jedes a ist b«, sondern auch umgekehrt: »Jedes b ist a«. Man darf das Gleichheitszeichen nicht mit der Kopula verwechseln. Die Gleichung stellt ein (allgemeines und affirmatives) Urteil dar, welches, wie die Logiker sagen, schlechthin konvertierbar ist. Z. B. das Urteil: »Alle Menschen (s) sind sprachbegabt (p)« kann ich schreiben: $s = p$, weil es umkehrbar ist; es sind nämlich alle Menschen sprachbegabt, und umgekehrt alle sprachbegabten Wesen sind Menschen. Dagegen darf ich das Urteil: »Alle Menschen (s) sind sterblich (p)« nicht schreiben: $s = p$; denn es ist ja nicht schlechthin konvertierbar, es sind nicht alle sterblichen Wesen Menschen. Ich muss deshalb schreiben: $s = s\,p$ d. h. alle Menschen sind sterbliche Menschen, und umgekehrt alle sterblichen Menschen sind Menschen. Das Urteil: »Jedes Säugetier (s) gehört in die Klasse der Warmblüter (w)« oder »Alle Säugetiere sind warmblütig« lautet in Zeichen $s = s\,w$, nicht etwa $s = w$. Das Urteil: »Jede Witwe (a) gehört in die Klasse der Wesen, welche Witwen oder Waisen (b) sind« d. h. »Jedes a ist $a + b$« lautet in Zeichen: $a = a\,(a + b)$, nicht etwa $a = a + b$. Man sieht also, dass das allgemeine affirmative Urteil in eine Gleichung verwandelt wird, indem man das Subjekt dem Produkte aus Subjekt und Prädikat gleichsetzt. Es ist nötig, sich das schon jetzt genau zu merken, obgleich wir später über die Verwandlung der Urteile in Gleichungen noch einige Andeutungen geben. — Es ergibt sich nunmehr leicht, dass ich für $s = p$ immer auch schreiben kann $p = s$.

Es dürfte nicht überflüssig sein, noch einige erklärende Beispiele zu bringen: $a = b + c$ bedeutet: Jedes a ist b oder c, und jedes Wesen, welches b oder c ist, ist a.

$a = b\,c$ bedeutet: Jedes a ist b und c, und jedes Wesen, welches b und c ist, ist a.

$a = bc + de$ bedeutet: Jedes a ist b und c, oder d und e; und jedes Wesen, welches b und c, oder d und e ist, ist a.

Das Additionszeichen entspricht also der Partikel »oder«, das Multiplikationszeichen entspricht der Partikel »und«; dabei muss aber der zusammengesetzte Ausdruck ins Prädikat gebracht werden; dies kann immer leicht geschehen durch Zuhilfenahme des Relativpronomens. Z. B. $a + b = c$ muss ausgedrückt werden: Jedes Wesen, welches a oder b ist, ist c und umgekehrt. Bringe ich den zusammengesetzten Ausdruck ins Subjekt, so bezeichnet die Sprache auch das Additionszeichen mit »und«. Statt: »jedes Wesen, welches a oder b ist, ist c« kann ich nämlich auch sagen: »jedes a und (jedes) b ist c.«

6. Die Zahl 1 bedeutet den allgemeinsten Begriff: Das Seiende d. h. das Existierende oder das Denkbare, das Mögliche, je nachdem im gegebenen Falle die Untersuchung sich auf den ganzen Bereich des Möglichen ausdehnt oder sich auf die Grenzen des wirklich Existierenden einschränkt. Die Zahl 0 bezeichnet das Kontradiktorium von 1: das Nicht-Seiende d. h. das Nicht-Existierende oder das Nicht-Denkbare, das Unmögliche, je nachdem 1 das Existierende oder das Mögliche ausdrückt.

Die Gleichung $a = 1$ bedeutet: Jedes a ist ein Seiendes, und jedes Seiende ist a. Ist a das Wahre, so habe ich: $a = 1$ d. h. jedes Seiende ist wahr, und (was sich von selbst versteht) jedes Wahre ist seiend.

Die Gleichung $a = 0$ bedeutet: Jedes a ist ein Nicht-Seiendes, und jedes Nicht-Seiende ist a. Man beachte hier, dass das Nicht-Seiende eine leere Klasse ist, welche keine Individuen hat. Ich darf deshalb über dasselbe alles aussagen; z. B. kann ich sagen, das Nicht-Seiende sei rund und viereckig zugleich. Aber eben weil eine solche Aussage gegenstandslos und nichtssagend ist, wird sie unterdrückt. Die Gleichung $a = 0$ bedeutet deshalb einfach: Jedes a ist ein Nicht-Seiendes; kein Wesen kann a sein. Bedeutet a Kreis, b viereckig, so ist ab der viereckige Kreis. Ich habe also $ab = 0$ d. h. es gibt keinen viereckigen Kreis. Ein Gleichung, auf deren einer Seite das Zeichen 0 steht, heisst Nullgleichung. Ebenso heisst Einsgleichung diejenige, auf deren einer Seite 1 steht. Z. B. $ab + (b + c)(d + e) = 0$ ist eine Nullgleichung; $ab = 1$ ist eine Einsgleichung.

Aus dem Gesagten merke man sich, dass das Seiende (1) Prädikat ist für alle möglichen Subjekte; denn jedes Ding ist ein Seiendes. Ebenso ist das Nicht-Seiende (0) Subjekt für alle möglichen Prädikate; denn von Nichts mag ich sagen, was mir gefällt.



## II. Grundsätze.

1. Grundsatz: Jeder Begriff ist sich selbst gleich; sind zwei Begriffe gleich, so sind auch ihre Kontradiktorien gleich. — Also $a = a$; wenn $a = e$, so ist $\bar{a} = \bar{e}$.

2. Grundsatz: Sind zwei Begriffe einem dritten gleich, so sind sie untereinander gleich. — Also wenn $a = c$ und $b = c$, so folgt $a = b$.

3. Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. — Also wenn $a = b$ und $c = d$, so folgt $a + d = b + c$.

4. Grundsatz: Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. — Also wenn $a = b$ und $c = d$, so folgt $ac = bd$.

Diese Sätze bedürfen keines Beweises. Sie ergeben sich mit unmittelbarer Evidenz aus den vorausgeschickten Erklärungen. Wir erläutern sie durch Beispiele.

Für 1. Ist a Mensch, so habe ich natürlich die grosse Wahrheit $a = a$ d. h. jeder Mensch ist menschlich, und umgekehrt jedes menschliche Wesen ist Mensch.

Wenn ferner jedes gleichwinklige Dreieck (a) ein gleichseitiges (e), und jedes gleichseitige Dreieck gleichwinklig ist, so habe ich $a = e$. Daraus folgt $\bar{a} = \bar{e}$ d. h. jedes nicht-gleichwinklige Dreieck ist nicht-gleichseitig, und jedes nicht-gleichseitige Dreieck ist nicht-gleichwinklig.

Für 2. Wenn jeder Mensch (a) sprachbegabt (e) und jedes sprachbegabte Wesen Mensch ist, so habe ich $a = e$. Ist ferner jeder Mensch vernünftig (i) und jedes vernünftige Wesen Mensch, so habe ich $a = i$. Aus beiden folgt $e = i$ d. h. jedes sprachbegabte Wesen ist vernünftig und jedes vernünftige Wesen ist sprachbegabt.

Für 3. und 4. Wenn alle Bürger (a) Hausherrn (e) und alle Hausherrn Bürger sind, so kann ich schreiben $a = e$. Wenn ferner jeder, der zufrieden (i), glücklich (o) und jeder Glückliche zufrieden ist, so habe ich: $i = o$. Daraus folgt aber $a + i = e + o$ d. h. jeder, der Bürger oder zufrieden ist, ist Hausherr oder glücklich; und umgekehrt jeder, der Hausherr oder glücklich ist, muss Bürger oder zufrieden sein. Ist z. B. Markus ein Bürger, so muss er Hausherr oder glücklich sein; ist Markus zufrieden, so muss er wiederum Hausherr oder glücklich sein. Und was von Markus gilt, bewährt sich an jedem, der in die Klasse $a + i$ d. h. zu den Leuten gehört, welche Bürger oder zufrieden sind. — Weiterhin habe ich nach dem vierten Grundsatz $ao = ei$ d. h. alle glücklichen Bürger sind zufriedene Hausherrn, und alle zufriedenen Hausherrn sind glückliche Bürger. Ist z. B. Markus so ein glücklicher Bürger, so weiss ich, dass er ein zufriedener Hausherr ist. Und ist Titus ein zufriedener Hausherr, so ist er sicher auch ein glücklicher Bürger.

## III. Kommutations- und Distributionsgesetze.

1. Kommutationsgesetz: Die logische Addition ist eine kommutative Operation d. h. man kann die Summanden nach Belieben ordnen und nach Belieben zu Theilsummen verbinden, z. B. $a+b+c+d=c+a+d+b=b+(a+d)+c=d+[(a+c)+b]$.

2. Kommutationsgesetz: Die logische Multiplikation ist eine kommutative Operation, z. B. $abcd=bcad=c(ba)d$.

1. Distributionsgesetz: Zwei Produkte werden zu einander addiert, indem man jeden einzelnen Faktor des einen Produktes zu jedem einzelnen Faktor des andern Produktes addiert und die erhaltenen Summen mit einander multipliziert, z. B. $ab+cd=(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$. — Man kann den Satz natürlich auf drei und mehr Produkte ausdehnen.

2. Distributionsgesetz: Zwei Summen werden mit einander multipliziert, indem man jeden einzelnen Summanden der einen Summe mit jedem einzelnen Summanden der andern Summe multipliziert und die erhaltenen Produkte zu einander addiert, z. B. $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. — Man kann den Satz natürlich auf drei und mehr Summen ausdehnen *).

Auch diese Sätze sind ohne Beweis klar. Wir erläutern sie durch Beispiele.

Für 1. und 2. Es sei a reich, b adlig, c zufrieden, d gelehrt. Es ist offenbar $a+b+c+d=c+b+d+a$ d. h. alle Personen, die reich oder adlig oder zufrieden oder gelehrt sind, sind zufrieden oder adlig oder gelehrt oder reich; und umgekehrt alle Personen, die zufrieden oder adlig oder gelehrt oder reich sind, sind reich oder adlig oder zufrieden oder gelehrt. — Es ist auch $a+b+c+d=a+(b+c)+d$ d. h. alle Personen, welche reich oder adlig oder zufrieden oder gelehrt sind, sind reich oder gehören in die Klasse von Leuten, so adlig oder zufrieden sind, oder sind gelehrt; und umgekehrt.

Ferner ist $abcd=cbda$ d. h. alle Personen, welche zugleich reich und adlig und zufrieden und gelehrt sind, sind zufrieden und adlig und gelehrt und reich; und umgekehrt. — Es ist auch $acbd=a(cb)d$ d. h. alle Personen, welche zugleich reich und zufrieden und adlig und gelehrt sind, sind reich und zufriedene Adlige und gelehrt; und umgekehrt.

Für 3. Es sei a roth, b Wein, c braun, d Bier. Jetzt bedeutet $ab+cd$ jedes Getränk, so in die Klasse der rothen Weine oder der braunen Biere

*) Den Gebrauch der Klammern setze ich, als aus der Mathematik hinreichend bekannt, voraus.



gehört. Ich habe jetzt $ab+cd=(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)$ d. h. jedes Getränk der besagten Klasse ist ein Getränk, das vier Eigenschaften zugleich in sich vereinigt: es ist roth oder braun; es ist ferner roth oder Bier; es ist drittens Wein oder braun; es hat endlich die vierte Eigenschaft, Wein oder Bier zu sein; und umgekehrt jedes Getränk, das sich der aufgezählten vier Eigenschaften erfreut, muss in die Klasse der rothen Weine oder der braunen Biere gehören.

Für 4. Es verlangt jemand in einem Laden ein Schreibzeug; es soll aber ein Bleistift (a) oder Tinte (b) sein, es soll auch rot (c) oder blau (d) sein. Der Mann verlangt offenbar ein Schreibzeug aus der Klasse $(a+b)(c+d)$. Ich habe jetzt $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ d. h. jedes Ding, das die beiden Eigenschaften, Bleistift oder Tinte und rot oder blau zu sein, in sich vereinigt, ist ein roter Bleistift oder ein blauer Bleistift oder rote Tinte oder blaue Tinte; und umgekehrt jedes Ding, das in eine dieser vier Klassen gehört, hat die beiden Eigenschaften Bleistift oder Tinte, rot oder blau zu sein.

### Beispiele.

Die Kommutationsgesetze bieten in ihrer Anwendung keine Schwierigkeit. Dagegen müssen wir uns die Distributionsgesetze an einigen Beispielen geläufig machen. — Man achte hier auf den vollkommenen Parallelismus, der zwischen den Beispielen a) und b), so wie zwischen den Beispielen unter c) und d) besteht. Die Beispiele unter a) gehen über in die Beispiele unter b), wenn man plus und Mal mit einander vertauscht. Durch dieselbe Vertauschung verwandeln sich die Beispiele unter c) in diejenigen unter d). Dieser Parallelismus ist charakteristisch für den logischen Kalkül.

Es ist ratsam, erst die Beispiele unter b) zu üben, weil das Verfahren aus der Mathematik bekannt und deshalb sehr leicht ist. Dann übe man die Beispiele unter a). Wenn man dabei auf den Parallelismus zwischen a) und b) achtet, so wird man auch hier bald nicht die geringste Schwierigkeit haben. — Ebenso übe man die Beispiele unter d) vor c).

a) Beispiele zum 1. Distributionsgesetz:

1. $ab+cd+ef=(a+c+e)(a+c+f)(a+d+e)(a+d+f)(b+c+e)(b+c+f)(b+d+e)(b+d+f)$.
2. $ab+m=(a+m)(b+m)$.
3. $n+abc=(n+a)(n+b)(n+c)$.
4. $abcd+ef+g=(a+e+g)(a+f+g)(b+c+g)(b+f+g)(c+e+g)(c+f+g)(d+e+g)(d+f+g)$.
5. $a(b+c)+(d+e)(f+g)=(a+d+e)(a+f+g)(b+c+d+e)(b+c+f+g)$.

b) Beispiele zum 2. Distributionsgesetz.

1. $(a+b)(c+d)(e+f) = a\,c\,e + a\,c\,f + a\,d\,e + a\,d\,f + b\,c\,e + b\,c\,f + b\,d\,e + b\,d\,f.$
2. $(a+b)\,m = a\,m + b\,m.$
3. $n\,(a+b+c) = n\,a + n\,b + n\,c.$
4. $(a+b+c)(d+e)\,f = a\,d\,f + a\,e\,f + b\,d\,f + b\,e\,f + c\,d\,f + c\,e\,f.$
5. $(a+b\,c)(d\,e+f\,g) = a\,d\,e + a\,f\,g + b\,c\,d\,e + b\,c\,f\,g.$

c) Beispiele zur Umkehr des 1. Distributionsgesetzes.

Wenn mehrere Summen, die mit einander multipliziert werden sollen, einen gemeinschaftlichen Summanden haben, so führt die Umkehrung des 1. Distributionsgesetzes bequemer zum Ziele, als die direkte Anwendung des 2. Distributionsgesetzes. Die Umkehr des 1. Distributionsgesetzes lautet: »Mehrere Summen, die einen gemeinschaftlichen Summanden haben, werden mit einander multipliziert, indem man zu dem gemeinschaftlichen Summanden das Produkt der übrigen Summanden addiert.« Also:

1. $(a+b)(a+c) = a + b\,c.$
2. $(a+b)(a+c)(a+d) = a + b\,c\,d.$
3. $(a+b+c)(a+d+e) = a + (b+c)(d+e) = a + b\,d + b\,e + c\,d + c\,e.$
4. $(a+b+c)(a+b+d) = a + (b+c)(b+d) = a + b + c\,d.$

Anmerkung. Man könnte auch ohne Fehler das 2. Distributionsgesetz anwenden und schreiben: $(a+b)(a+c) = a\,.\,a + a\,c + b\,.\,a + b\,c.$ Aber dieses Resultat ist, wie man sieht, weniger bequem, als $(a+b)(a+c) = a + b\,c.$ Dass in der That $a\,.\,a + a\,c + b\,a + b\,c = a + b\,c$ ist, wird man in der Folge durch Anwendung der Tautologie- und Absorptionsgesetze noch deutlicher einsehen.

d) Beispiele zur Umkehr des 2. Distributionsgesetzes.

Wenn mehrere Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, zu einander addiert werden sollen, so führt die Umkehrung des 2. Distributionsgesetzes bequemer zum Ziele, als die direkte Anwendung des 1. Distributionsgesetzes. Die Umkehr des 2. Distributionsgesetzes lautet: »Mehrere Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden zu einander addiert, indem man den gemeinschaftlichen Faktor mit der Summe der übrigen Faktoren multipliziert.« Also:

1. $a\,b + a\,c = a\,(b+c).$
2. $a\,b + a\,c + a\,d = a\,(b+c+d).$
3. $a\,b\,c + a\,d\,e = a\,(b\,c + d\,e) = a\,(b+d)(b+e)(c+d)(c+e).$
4. $a\,b\,c + a\,b\,d = a\,(b\,c + b\,d) = a\,b\,(c+d).$



Anmerkung. Man könnte auch ohne Fehler das 1. Distributionsgesetz anwenden und schreiben: $a\,b + a\,c = (a+a)(a+c)(b+a)(b+c).$ Aber dies wäre weniger praktisch.

Bemerkungen.

a) Die Mathematiker unterscheiden in der Addition und Multiplikation das Kommutationsgesetz, welches beliebige Ordnung der Summanden oder Faktoren gestattet, vom Associationsgesetz, welches unter Beibehaltung der gegebenen Ordnung beliebige Teilsummen oder Teilprodukte zu bilden gestattet. Nach dem Kommutationsgesetz ist $a+b+c = a+c+b = b+a+c$ etc.; nach dem Associationsgesetz ist $a+b+c+d = a+(b+c)+d = (a+b)+(c+d)$ etc. Aus dem Kommutationsgesetz folgt das Associationsgesetz, aber nicht umgekehrt. Wir haben deshalb vollen Grund gehabt, in unsern Sätzen bloss von der Kommutation zu reden und die Association darunter zu begreifen.

b) Wundt*) meint, die logische Multiplikation sei nicht kommutativ. Er bringt ein Beispiel: Bedeutet a weiss und b Schaf, so stelle $a\,b$ die weissen Schafe, $b\,a$ die Weisse der Schafe dar. Ebenso seien denn doch Rathaus und Hausrat, Wagenrad und Radwagen ganz verschiedene Dinge. — Diese Einrede hat ihren einzigen Grund in einem ganz verschwommenen Begriff von der logischen Multiplikation. Wenn a Haus und b Plato ist, so ist wohl nach Wundt $a\,b$ das Haus des Plato. Was ist denn das Haus des Plato? Ist es das Haus, wo er geboren wurde, oder wo er starb, oder wo er lehrte, oder wo er wohnte, oder wo ein Standbild Platos errichtet ist? Mit solch unklaren Grössen kann niemand rechnen oder philosophieren. Man muss klare und eindeutige Definitionen aufstellen, soll nicht alles drunter und drüber gehen. Also wenn a weiss und b Schaf ist, so sind $a\,b$ und $b\,a$ die weissen Schafe; keineswegs aber die Weisse der Schafe. Denn die Weisse der Schafe ist kein Schaf; sie ist auch eigentlich nicht weiss, sondern durch sie ist das Schaf weiss. Wenn a Haus und b Plato ist, so ist $a\,b$ oder $b\,a$ ein Ding, das Haus und Plato zugleich ist, also ein Unsinn; in Zeichen $a\,b = 0.$ — Wie soll ich denn das Haus des Plato in Zeichen darstellen? Dafür mag jemand ein anderes Zeichen aussinnen; und er wird gut thun, verschiedene Zeichen zu wählen, je nachdem der durch jene Worte bezeichnete Begriff ein anderer ist. Mit den zwei Zeichen der Addition und Multiplikation können wir denn doch nicht alle Verhältnisse ausdrücken wollen, die zwischen zwei Begriffen möglich sind. Wenn aber jemand durchaus von uns ein Zeichen haben will, nun wohl: es sei a Haus, b drücke alles aus, was in einer beliebigen

*) Logik 1880, 1. Bd. S. 225.

b) Beispiele zum 2. Distributionsgesetz.

1. $(a+b)(c+d)(e+f) = ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf$.
2. $(a+b)m = am+bm$.
3. $n(a+b+c) = na+nb+nc$.
4. $(a+b+c)(d+e)f = adf+aef+bdf+bef+cdf+cef$.
5. $(a+bc)(de+fg) = ade+afg+bcde+bcfg$.

c) Beispiele zur Umkehr des 1. Distributionsgesetzes.

Wenn mehrere Summen, die mit einander multipliziert werden sollen, einen gemeinschaftlichen Summanden haben, so führt die Umkehrung des 1. Distributionsgesetzes bequemer zum Ziele, als die direkte Anwendung des 2. Distributionsgesetzes. Die Umkehr des 1. Distributionsgesetzes lautet: »Mehrere Summen, die einen gemeinschaftlichen Summanden haben, werden mit einander multipliziert, indem man zu dem gemeinschaftlichen Summanden das Produkt der übrigen Summanden addiert.« Also:

1. $(a+b)(a+c) = a+bc$.
2. $(a+b)(a+c)(a+d) = a+bcd$.
3. $(a+b+c)(a+d+e) = a+(b+c)(d+e) = a+bd+be+cd+ce$.
4. $(a+b+c)(a+b+d) = a+(b+c)(b+d) = a+b+cd$.

Anmerkung. Man könnte auch ohne Fehler das 2. Distributionsgesetz anwenden und schreiben: $(a+b)(a+c) = a.a+ac+b.a+bc$. Aber dieses Resultat ist, wie man sieht, weniger bequem, als $(a+b)(a+c) = a+bc$. Dass in der That $a.a+ac+ba+bc = a+bc$ ist, wird man in der Folge durch Anwendung der Tautologie- und Absorptionsgesetze noch deutlicher einsehen.

d) Beispiele zur Umkehr des 2. Distributionsgesetzes.

Wenn mehrere Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, zu einander addiert werden sollen, so führt die Umkehrung des 2. Distributionsgesetzes bequemer zum Ziele, als die direkte Anwendung des 1. Distributionsgesetzes. Die Umkehr des 2. Distributionsgesetzes lautet: »Mehrere Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden zu einander addiert, indem man den gemeinschaftlichen Faktor mit der Summe der übrigen Faktoren multipliziert.« Also:

1. $ab+ac = a(b+c)$.
2. $ab+ac+ad = a(b+c+d)$.
3. $abc+ade = a(bc+de) = a(b+d)(b+e)(c+d)(c+e)$.
4. $abc+abd = a(bc+bd) = ab(c+d)$.



Anmerkung. Man könnte auch ohne Fehler das 1. Distributionsgesetz anwenden und schreiben: $ab+ac = (a+a)(a+c)(b+a)(b+c)$. Aber dies wäre weniger praktisch.

Bemerkungen.

a) Die Mathematiker unterscheiden in der Addition und Multiplikation das Kommutationsgesetz, welches beliebige Ordnung der Summanden oder Faktoren gestattet, vom Associationsgesetz, welches unter Beibehaltung der gegebenen Ordnung beliebige Teilsummen oder Teilprodukte zu bilden gestattet. Nach dem Kommutationsgesetz ist $a+b+c = a+c+b = b+a+c$ etc.; nach dem Associationsgesetz ist $a+b+c+d = a+(b+c)+d = (a+b)+(c+d)$ etc. Aus dem Kommutationsgesetz folgt das Associationsgesetz, aber nicht umgekehrt. Wir haben deshalb vollen Grund gehabt, in unsern Sätzen bloss von der Kommutation zu reden und die Association darunter zu begreifen.

b) Wundt*) meint, die logische Multiplikation sei nicht kommutativ. Er bringt ein Beispiel: Bedeutet a weiss und b Schaf, so stelle ab die weissen Schafe, ba die Weisse der Schafe dar. Ebenso seien denn doch Rathaus und Hausrat, Wagenrad und Radwagen ganz verschiedene Dinge. — Diese Einrede hat ihren einzigen Grund in einem ganz verschwommenen Begriff von der logischen Multiplikation. Wenn a Haus und b Plato ist, so ist wohl nach Wundt ab das Haus des Plato. Was ist denn das Haus des Plato? Ist es das Haus, wo er geboren wurde, oder wo er starb, oder wo er lehrte, oder wo er wohnte, oder wo ein Standbild Platos errichtet ist? Mit solch unklaren Grössen kann niemand rechnen oder philosophieren. Man muss klare und eindeutige Definitionen aufstellen, soll nicht alles drunter und drüber gehen. Also wenn a weiss und b Schaf ist, so sind ab und ba die weissen Schafe; keineswegs aber die Weisse der Schafe. Denn die Weisse der Schafe ist kein Schaf; sie ist auch eigentlich nicht weiss, sondern durch sie ist das Schaf weiss. Wenn a Haus und b Plato ist, so ist ab oder ba ein Ding, das Haus und Plato zugleich ist, also ein Unsinn; in Zeichen $ab = 0$. — Wie soll ich denn das Haus des Plato in Zeichen darstellen? Dafür mag jemand ein anderes Zeichen aussinnen; und er wird gut thun, verschiedene Zeichen zu wählen, je nachdem der durch jene Worte bezeichnete Begriff ein anderer ist. Mit den zwei Zeichen der Addition und Multiplikation können wir denn doch nicht alle Verhältnisse ausdrücken wollen, die zwischen zwei Begriffen möglich sind. Wenn aber jemand durchaus von uns ein Zeichen haben will, nun wohl: es sei a Haus, b drücke alles aus, was in einer beliebigen

*) Logik 1880, 1. Bd. S. 225.

Beziehung zu Plato steht, dann ist a b oder b a Haus des Plato. Glücklicherweise lenkt Wundt am Schlusse ein, sonst wäre es um den logischen Kalkül geschehen. »Für unser wirkliches Denken,« sagt er, »gilt es durchgehends, dass aus zwei gegebenen Begriffen nicht bloss ein zusammengesetzter Begrift entstehen kann, sondern dass stets zwei (bloss zwei?) von einander verschiedene Determinationsprodukte möglich sind, je nachdem der eine Begriff der Determinator und der andere der Determinand ist oder umgekehrt. Welcher dieser beiden Fälle stattfinde, dies kann dann aber allerdings, wie wir unten sehen (?) werden, für vorübergehende Zwecke des Kalküls unbestimmt bleiben.« Ich kann also nach Wundt ruhig rechnen und philosophieren, ohne mir klar zu werden, ob ich von weissen Schafen oder von der Weisse der Schafe handle. Ich kann sogar im Laufe der Rechnungen und Schlussbildungen ganz getrost den Hausrat in ein Rathaus verwandeln.

## IV. Tautologiegesetze *).

1. Tautologiegesetz: $a + a = a$. — Also auch $a + a + a + .. = a$.
2. Tautologiegesetz: $a \,.\, a = a$. — Also auch $a \,.\, a \,.\, a \,... = a$.
3. Tautologiegesetz: $a + \bar{a} = 1$.
4. Tautologiegesetz: $a \,.\, \bar{a} = 0$.

Die Sätze ergeben sich von selbst. Wir verdeutlichen sie durch Beispiele. Es sei a Mensch. Wir haben dann:

Für 1. $a = a + a$ d. h. jeder Mensch ist Mensch oder Mensch, und umgekehrt jeder, der Mensch oder Mensch ist, ist Mensch. — Der Satz klingt ganz sonderbar; und es mag wenige Leute geben, die sich zum Bewusstsein gebracht haben, dass wir von demselben bei unserm Denken unzählige Mal Gebrauch machen. Haben wir die beiden Sätze: »Jeder Mensch (a) ist sterblich (b), jedes sündige (c) Wesen ist unglücklich (d)«, so schliessen wir: Jedes Wesen, das Mensch oder sündig $(a + c)$ ist, ist sterblich oder unglücklich $(b + d)$«. Analog müssten wir aus den beiden Sätzen: »Jeder Mensch ist sterblich, jedes Wesen, das eine nichtgeistige Seele hat (e), ist sterblich« schliessen: »Jedes Wesen, das Mensch ist oder eine nichtgeistige Seele hat $(a + e)$, ist sterblich oder sterblich $(b + b)$«; statt dessen aber sagt jedermann

*) Den Namen Tautologiegesetze schlägt Schröder, Algebra der Logik, S. 263, für die beiden ersten hier aufgeführten Sätze vor. Boole gab das 1. Gesetz nicht zu, weil er nur mit disjunkten Summanden rechnete. Er nannte das 2. Gesetz law of duality. Jevons, der das 1. Gesetz zuerst aussprach, nannte es law of unity, weil die Nichtbeachtung desselben beim Zählen zu falschen Ergebnissen führt. Wenn ich z. B. die im Zimmer versammelten Personen zähle und dabei eine zweimal berücksichtige, so erhalte ich natürlich eine zu grosse Zahl. Das 2. Gesetz nannte Jevons law of simplicity.



sofort: »Jedes Wesen, das Mensch ist oder eine nichtgeistige Seele hat, ist sterblich (b)«. Wir benutzen also den Satz: $b + b = b$. Dasselbe geschieht jedesmal, so oft wir mehrere Sätze von gleichem Prädikate in einen zusammengezogenen Satz vereinigen.

Für 2. $a = a \,.\, a$ d. h. jeder Mensch ist Mensch und Mensch, und umgekehrt jeder, der Mensch und Mensch ist, ist Mensch. — Dieser Satz klingt eben so sonderbar, wie der vorige. Er findet aber auch eben so im gewöhnlichen Denken, freilich unbewusst, die ausgiebigste Verwendung. Haben wir die beiden Sätze: »Jeder Mensch (a) ist sterblich (b), jedes sündige (c) Wesen ist unglücklich (d)«, so schliessen wir: Jedes Wesen, das Mensch und sündig (ac) ist, ist sterblich und unglücklich (bd). Analog müssten wir aus den beiden Sätzen: »Jeder Mensch ist sterblich, jeder Mensch ist vernünftig (e)« schliessen: »Jedes Wesen, das Mensch und Mensch $(a \,.\, a)$ ist, ist sterblich und vernünftig (be)«; statt dessen schliessen wir aber: Jeder Mensch (a) ist sterblich und vernünftig. Wir benutzen also den Satz $a \,.\, a = a$. Dasselbe beobachten wir, so oft mehrere Sätze von gleichem Subjekt in einen zusammengezogenen Satz vereinigt werden.

Für 3. $1 = a + \bar{a}$ d. h. Jedes Seiende ist Mensch oder Nicht-Mensch, und umgekehrt jedes Wesen, das Mensch oder Nicht-Mensch ist, ist ein Seiendes. — Der Satz ist der Ausdruck des Princips von ausgeschlossenen Dritten.

Für 4. $a \,.\, \bar{a} = 0$ d. h. Jedes Wesen, das zugleich Mensch und Nicht-Mensch ist, ist ein Nicht-Seiendes, und umgekehrt (was selbstverständlich oder vielmehr nichtssagend ist) jedes Nicht-Seiende ist Mensch und Nicht-Mensch zugleich. — Dieser Satz bringt das Prinzip des Widerspruchs zum Ausdruck.

## V. Ontologiegesetze.

Die vier folgenden nennen wir Ontologiegesetze d. h. Sätze über das Seiende, weil sie uns die Behandlung der Symbole 1 und 0 lehren, welche das Seiende (τὸ ὄν) und Nicht-Seiende bedeuten.

1. Ontologiegesetz: $a + 0 = a$.
2. Ontologiegesetz: $a \,.\, 1 = a$.
3. Ontologiegesetz: $a + 1 = 1$.
4. Ontologiegesetz: $a \,.\, 0 = 0$.

Wir erläutern diese Sätze durch Beispiele. Es sei a Mensch, dann ist:

Für 1. $a = a + 0$ d. h. jeder Mensch ist Mensch oder nicht-seiend; und umgekehrt jedes Wesen, das Mensch oder nicht-seiend ist, ist Mensch, nämlich jeder Mensch ist Mensch, und das Nicht-Seiende ist auch Mensch (und dazu noch alles Mögliche und Unmögliche).

Für 2. $a = a \,.\, 1$ d. h. jeder Mensch ist Mensch und ein Seiendes, und umgekehrt jeder seiende Mensch ist Mensch.

Für 3. $a + 1 = 1$ d. h. jedes Wesen, das Mensch oder ein Seiendes ist, ist ein Seiendes, und umgekehrt jedes Seiende ist Mensch oder ein Seiendes.

Für 4. $a \,.\, 0 = 0$ d. h. jeder Mensch, der ein Nicht-Seiendes als Merkmal enthält, ist selbst ein Nicht-Seiendes, und umgekehrt jedes Nicht-Seiende ist nicht-seiend und Mensch zugleich (und dazu noch alles Uebrige). — Dieser Satz ist natürlich für den Fortschritt unseres Denkens ungemein wichtig. Mit seiner Hilfe entscheiden wir, ob etwas möglich oder unmöglich ist. Entdecken wir, dass irgend ein a (z. B. ein gleichseitiges Dreieck mit ungleichen Höhen) ein unmögliches Merkmal (0) haben müsste, dass also $a = a \,.\, 0$, so sagen wir: a ist unmöglich $(a = 0)$.

Wenn ich das 2. Ontologiegesetz unterstelle, so kann ich die drei übrigen mit Hilfe der Tautologiegesetze auch leicht rechnerisch beweisen*):

Für 1. $a + 0 = a + a \,.\, \bar{a} = (a + a)(a + \bar{a})$ [nach dem 1. Distributionsgesetz] $= a \,.\, 1 = a$.

Für 3. $a + 1 = a + (a + \bar{a}) = (a + a) + \bar{a} = a + \bar{a} = 1$.

Für 4. $a \,.\, 0 = a\,(a \,.\, \bar{a}) = (a \,.\, a)\,\bar{a} = a \,.\, \bar{a} = 0$.

### Beispiele.

Ich will einige Beispiele anführen, damit wir uns an die Tautologie- und Ontologiegesetze gewöhnen. Denn diese kommen jeden Augenblick im logischen Kalkül zur Anwendung.

1. $(a + a) \,.\, a = a \,.\, a = a$.
2. $a \,.\, a + a = a + a = a$.
3. $(a + a)\,\bar{a} = a\,\bar{a} = 0$.
4. $a\,a + \bar{a} = a + \bar{a} = 1$.
5. $x = x \,.\, 1 = x\,(e + \bar{e}) = x\,e + x\,\bar{e}$.
6. $x = x + 0 = x + e\,\bar{e} = (x + e)\,(x + \bar{e})$.
7. $x\,a\,\bar{a} = x \,.\, 0 = 0$.
8. $x + a + \bar{a} = x + 1 = 1$.
9. $a\,b\,c \,.\, 0 = 0$.
10. $a + b + c + 1 = 1$.
11. $a\,(b + c\,a) = a\,b + a\,c\,a = a\,b + a\,c = a\,(b + c)$.
12. $a + b\,(c + a) = (a + b)\,(a + c + a) = (a + b)\,(a + c) = a + b\,c$.

*) Schröder, Operationskreis S. 11.



## VI. Negationsgesetze.

1. Negationsgesetz: Das Kontradiktorium vom Kontradiktorium ist der ursprüngliche Begriff. Also $\bar{\bar{a}} = a$.

2. Negationsgesetz: $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$.

3. Negationsgesetz: Das Kontradiktorium einer Summe ist das Produkt aus den Kontradiktorien der Summanden. Also $\overline{a + e} = \bar{a}\,\bar{e}$.

4. Negationsgesetz: Das Kontradiktorium eines Produktes ist die Summe aus den Kontradiktorien der Faktoren. Also $\overline{a\,e} = \bar{a} + \bar{e}$.

Der 1. Satz ist selbstverständlich. Er drückt das Prinzip aus: Duplex negatio affirmat.

Der 2. Satz ergibt sich aus der Definition von 1 und 0.

Um die beiden andern Sätze nach dem Vorgang Grassmanns zu beweisen, müssen wir eine Ueberlegung vorausschicken. Wenn ich habe $1 = a + x$ und $0 = a \,.\, x$, so folgt $x = \bar{a}$.

Beweis. Die erste Gleichung mit $\bar{a}$ multiplizirt gibt: $\bar{a} = a \,.\, \bar{a} + \bar{a}x = 0 + \bar{a}x = \bar{a}x$.

Addire ich jetzt die Gleichungen: $\bar{a} = \bar{a}x$ und $0 = ax$, so folgt: $\bar{a} + 0 = \bar{a}x + ax$ d. h. $\bar{a} = x\,(\bar{a} + a) = x \,.\, 1 = x$ q. e. d.

Es ist also x die Negation von a. Daraus folgt: Will ich die Negation zu einem Ausdrucke a finden, so muss ich einen Ausdruck x suchen, so dass $a + x = 1$ und $ax = 0$. Dieser Satz ist auch an und für sich selbstverständlich.

Jetzt beweise ich die beiden Negationsgesetze, wie folgt:

Für 3. $\overline{a + e} = \bar{a}\,\bar{e}$. Das wird wahr sein, wenn $(a + e)\,\bar{a}\,\bar{e} = 0$, und zugleich $(a + e) + \bar{a}\,\bar{e} = 1$. — Es ist aber: $(a + e)\,\bar{a}\,\bar{e} = (a\,\bar{a})\,\bar{e} + (e\,\bar{e})\,\bar{a} = 0 + 0 = 0$ q. e. d.

Ferner: $a + e + \bar{a}\,\bar{e} = a + e \,.\, 1 + \bar{a}\,\bar{e} = a + e\,(a + \bar{a}) + \bar{a}\,\bar{e} = a + e\,a + e\,\bar{a} + \bar{e}\,\bar{a} = a + e\,a + (e + \bar{e})\,\bar{a} = a + e\,a + \bar{a} = (a + \bar{a}) + e\,a = 1 + e\,a = 1$ q. e. d.

Für 4. $\overline{a\,e} = \bar{a} + \bar{e}$. Das ist richtig, wenn $a\,e\,(\bar{a} + \bar{e}) = 0$, und $a\,e + \bar{a} + \bar{e} = 1$. Es ist aber: $a\,e\,(\bar{a} + \bar{e}) = a\,e\,\bar{a} + a\,e\,\bar{e} = e \,.\, 0 + a \,.\, 0 = 0 + 0 = 0$ q. e d.

Ferner: $a\,e + \bar{a} + \bar{e} = a\,e + \bar{a} + \bar{e}\,(a + \bar{a}) = a\,e + \bar{a} + a\,\bar{e} + \bar{a}\,\bar{e} = a\,(e + \bar{e}) + \bar{a} + \bar{a}\,\bar{e} = a + \bar{a} + \bar{a}\,\bar{e} = 1 + \bar{a}\,\bar{e} = 1$ q. e. d.

Bemerkung. Wundt*) meint, wolle man $(a + e + i)\,u$ negieren, so müsse man zuerst die Klammer wegschaffen und dann die Negation ausführen. »Die Negation eines Produktes von der Form $(a + e + i)\,u$ ist also

*) Logik I. S. 257.

nicht etwa $\bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{o}$, sondern $(\bar{a} + \bar{o})\,(\bar{e} + \bar{o})\,(\bar{\imath} + \bar{o})$.« Diese Vorsicht Wundts ist überflüssig. Nach dem 2. Distributionsgesetz ist ja $\bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{u} = (\bar{a} + \bar{u})\,(\bar{e} + \bar{u})\,(\bar{\imath} + \bar{u})$.

Beispiele.

Da die Negationsgesetze die häufigste Anwendung in unserm Algorithmus finden, wollen wir uns durch einige Beispiele an sie gewöhnen.

1. Wenn $a\,e = i + u$, so ist $\bar{a} + \bar{e} = \bar{\imath}\,\bar{u}$.
2. Wenn $a\,e = \bar{\imath}$, so ist $\bar{a} + \bar{e} = i$.
3. Wenn $a + e = 0$, so ist $\bar{a}\,\bar{e} = 1$.
4. Wenn $(a + \bar{e})\,(\bar{\imath} + u) = m\,\bar{n}\,x$, so ist $\bar{a}\,e + i\,\bar{u} = \bar{m} + n + \bar{x}$.
5. Wenn $\bar{a} + e\,i\,\bar{u} = m\,(\bar{n} + x + \bar{z})$, so ist $a\,(\bar{e} + \bar{\imath} + u) = \bar{m} + n\,\bar{x}\,z$.

## VII. Dualitätsgesetz.

In jeder allgemein giltigen Formel des logischen Algorithmus, welche aus Begriffssymbolen mit Hilfe des Additions-, Multiplikations- und Negationszeichens unter Zutritt des Gleichheitszeichens zusammengesetzt ist, kann ich, unbeschadet ihrer Richtigkeit folgende Veränderung vornehmen: 1. ich verwandele alle Additionszeichen in Multiplikationszeichen und die Multiplikationszeichen in Pluszeichen, wobei zu beachten ist, ob Klammern beizufügen sind oder überflüssig werden; 2. ich verwandele zugleich jedes 0 in 1 und jedes 1 in 0.

Beispiele.

$a + b = b + a$. — Also auch $a\,b = b\,a$.
$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$. — Also $a + b\,c = (a + b)\,(a + c)$.
$a\,.\,0 = 0$. — Also $a + 1 = 1$.
$a + a = a$. — Also $a\,.\,a = a$.
$a\,.\,\bar{a} = 0$. — Also $a + \bar{a} = 1$.
$\overline{a\,e} = \bar{a} + \bar{e}$. — Also $\overline{a + e} = \bar{a}\,\bar{e}$.

Beweis. Die Gleichung bleibt giltig nach dem 1. Grundsatze, wenn ich beide Seiten negiere. Dadurch werden aber, wie sich bei einiger Ueberlegung aus dem dritten und vierten Negationsgesetz ergibt, alle Additionszeichen in Multiplikationszeichen verwandelt und umgekehrt; ebenso verwandelt sich 0 in 1, 1 in 0, a in $\bar{a}$, $\bar{a}$ in a, e in $\bar{e}$, $\bar{e}$ in e etc. Die so erhaltene Formel gilt, weil es sich um eine allgemeine Formel handelt, für jeden Werth von a, e etc. Ich kann also in die neue Formel für $\bar{a}$, $\bar{e}$ ... einsetzen a, e ...; und dadurch wird a, e ... zu $\bar{a}$, $\bar{e}$ ... Hiermit sind aber die allgemeinen Buchstabensymbole in der ursprünglichen Gleichung wiederhergestellt q. e. d.

Man beachte sehr, dass es sich um allgemein giltige Formeln handelt, wo also die Buchstabensymbole einen beliebigen Begriff bezeichnen können, ohne die Formel zu fälschen. Habe ich das Urteil: »Alle Menschen (s) sind sterblich (p)« und mithin die Gleichung $s\,p = s$, so kann ich natürlich nicht das Dualitätsgesetz anwenden und schreiben: $s + p = s$ d. h. alle Wesen, die Menschen oder sterblich sind, sind Menschen und umgekehrt; denn das ist offenbar falsch. Aber die Gleichung $s\,p = s$ gilt ja auch nicht für beliebige Werte von s und p, sondern nur für den Fall, wo s Mensch und p sterblich ist; wäre aber z. B. s Viereck und p rund, so könnte ich nicht sagen $s = s\,p$ d. h. jedes Viereck ist rund*).



## VIII. Absorptionsgesetze**).

1. Absorptionsgesetz: Ein Summand, der einen Mitsummanden als Faktor einschliesst, kann, unbeschadet des Wertes der Summe, wegbleiben, z. B. $a + a\,b = a$. — Die Umkehr dieses Satzes lautet: Einer Summe kann ich, unbeschadet ihres Werthes, einen beliebigen Summanden beifügen, welcher einen der vorhandenen Summanden als Faktor einschliesst, z. B. $a = a + a\,b$, oder $a + c = a + c + b\,c$.

2. Absorptionsgesetz: Ein Faktor, der einen Mitfaktor als Summanden einschliesst, kann, unbeschadet des Wertes des Produktes, wegbleiben, z. B. $a\,(a + b) = a$. — Die Umkehr dieses Satzes lautet: Einem Produkte kann ich, unbeschadet seines Wertes, einen beliebigen Faktor beifügen, welcher einen der vorhandenen Faktoren als Summanden einschliesst, z. B. $a = a\,(a + b)$, oder $a\,c = a\,c\,(b + c)$.

3. Absorptionsgesetz: Zu einer Summe kann man, unbeschadet ihres Wertes, das Produkt zweier Summanden addieren; dabei darf man eine, aber auch nur eine, Kontradiktion in dem beizufügenden Produkte unterdrücken, z. B. $a\,b + \bar{a}\,c = a\,b + \bar{a}\,c + b\,c$. — Die Umkehr dieses Satzes lautet: Ein Summand $(b\,c)$, der das Produkt zweier Mitsummanden $(a\,b$ und $\bar{a}\,c)$ mit Unterdrückung eines Gegensatzes darstellt, darf wegbleiben; um so mehr darf ein Summand $(b\,c\,d)$ wegbleiben, der einen solchen Summanden $(b\,c)$ als Faktor einschliesst, z. B. $a\,b + \bar{a}\,c + b\,c = a\,b + \bar{a}\,c$; $a\,b + \bar{a}\,c + b\,c\,d = a\,b + \bar{a}\,c$. — Vgl. hierzu die Bemerkungen unten.

4. Absorptionsgesetz: Einem Produkte kann man, unbeschadet

*) Den Namen Dualismus finde ich bei Schröder, Operationskreis S. 12. Er ist sehr passend, weil infolge unseres Satzes jeder Formel eine zweite dual zur Seite steht, wenn nicht zufällig eine Formel zu sich selbst dual ist, wie diese $a = a$. Der Beweis für das Gesetz wurde unseres Wissens bislang von keinem andern Auktor erbracht.

**) Den Namen Absorptionsgesetz schlägt Schröder, Algebra der Logik S. 277, für das erste der hier aufgeführten Gesetze vor.

seines Wertes, die Summe zweier Faktoren beifügen oder nicht beifügen; dabei darf man eine, aber auch nur eine, Kontradiktion in dem beizufügenden Produkte unterdrücken, z. B. $(a + b)(\bar{a} + c) = (a + b)(\bar{a} + c)(b + c)$. — Die Umkehr dieses Satzes lautet: Ein Faktor $(b + c)$, der die Summe zweier Mitfaktoren $(a + b$ und $\bar{a} + c)$ mit Unterdrückung eines Gegensatzes darstellt, darf wegbleiben; um so mehr darf ein Faktor $(b + c + d)$ wegbleiben, der einen solchen Faktor $(b + c)$ als Summanden einschliesst, z. B. $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$; $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c + d) = (a + b)(\bar{a} + c)$.

Beweis. Für 1. $a + ab = a \cdot 1 + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$ q. e. d.

Für 2. $a(a + b) = a$. Man kann das in analoger Weise, wie das Vorhergehende beweisen. Es folgt aber auch unmittelbar nach dem Dualitätsgesetze aus dem vorstehenden Satze.

Für 3. $ab + \bar{a}c = ab + \bar{a}c + bc$. Denn $ab + \bar{a}c = (ab + abc) + (\bar{a}c + \bar{a}bc) = ab + \bar{a}c + (abc + \bar{a}bc) = ab + \bar{a}c + bc(a + \bar{a}) = ab + \bar{a}c + bc$ q. e. d.

Für 4. Das kann analog bewiesen werden, wie das 3. Gesetz; es folgt aber auch unmittelbar aus demselben nach dem Dualitätsgesetz.

Bemerkungen zu den Absorptionsgesetzen: 1. Das erste Absorptionsgesetz lautet: $a + ab = a$. Setzt man in diesem Ausdrucke für b den Wert 1 ein, so erhält man das 1. Tautologiegesetz: $a + a = a$. Setzt man für a den Wert 1 ein, so erhält man das 3. Ontologiegesetz: $1 + b = 1$.

2. Setzt man in die Formel $a(a + b) = a$ des zweiten Absorptionsgesetzes für b den Wert 0 ein, so erhält man das 2. Tautologiegesetz: $a \cdot a = a$. Setzt man für a den Wert 0 ein, so erhält man das 4. Ontologiegesetz: $0 \cdot b = 0$. — Alle Tautologiegesetze sind nur ein Spezialfall der Absorption.

3. Beim dritten Absorptionsgesetze bedenke man, dass ich einer Summe stets das Produkt zweier Summanden beifügen darf, z. B. $ac + bd = ac + bd + abcd$. Denn der Summand $abcd$ ändert nach dem 1. Absorptionsgesetze nichts an der Summe, weil er einen Mitsummanden, nämlich $ac$ oder auch $bd$, als Faktor einschliesst. Setze ich nun in die letzte Formel für b den Wert $\bar{a}$ ein, so erhalte ich: $ac + \bar{a}d = ac + \bar{a}d + a\bar{a}cd$. Es hat aber der Summand $a\bar{a}cd$ wegen des Gegensatzes $a\bar{a}$ den Wert 0. Es ist nämlich $a\bar{a}cd = 0 \cdot cd = 0$. Nun sagt aber das dritte Absorptionsgesetz, dass ich Einen Gegensatz in dem neugebildeten Summanden unterdrücken darf. Statt $a\bar{a}cd$ kann ich also schreiben $cd$; so erhalte ich $ac + \bar{a}d = ac + \bar{a}d + cd$, und das ist das dritte Absorptionsgesetz. Wenn ich hätte: $aec + \bar{a}\bar{e}d$, so dürfte ich den Summanden $ac\bar{a}\bar{e}cd$ beifügen. Nach Unterdrückung des Gegensatzes $a\bar{a}$ bleibt $e\bar{e}cd = 0$. Den zweiten Gegensatz $e\bar{e}$ darf ich nicht mehr unterdrücken. Der neue Summand bleibt also 0, und es wäre vollkommen zwecklos, ihn der Summe beifügen zu wollen.



Wenn ich in der Formel $ab + \bar{a}c = ab + \bar{a}c + bc$ für b und c den Wert 1 einsetze, so erhalte ich: $a + \bar{a} = a + \bar{a} + 1$. Da nach dem 3. Ontologiegesetz $a + \bar{a} + 1 = 1$, so habe ich $a + \bar{a} = 1$. Das 3. Absorptionsgesetz wird also in diesem besondern Falle zum 3. Tautologiegesetz.

Wenn ich in derselben Formel bloss für b den Wert 1 einsetze, so erhalte ich: $a + \bar{a}c = a + \bar{a}c + c$. Da ferner nach dem 1. Absorptionsgesetze $\bar{a}c + c = c$, so habe ich: $a + \bar{a}c = a + (\bar{a}c + c) = a + c$ d. h. wenn in einer Summe $(a + \bar{a}c)$ ein Summand $(\bar{a}c)$ das Kontradiktorium $(\bar{a})$ eines Mitsummanden (a) als Faktor einschliesst, so kann man dieses Kontradiktorium $(\bar{a})$ unbeschadet des Wertes der Summe unterdrücken. — Man wird wohl thun, sich diesen besondern Fall des 3. Absorptionsgesetzes eigens einzuprägen.

4. Beim vierten Absorptionsgesetze bedenke man, dass ich einem Produkte stets die Summe zweier Faktoren als neuen Faktor beifügen darf. Denn nach dem 2. Absorptionsgesetze ist: $(a + c)(b + d) = (a + c)(b + d)(a + c + b + d)$. Setze ich in diese Formel für b den Wert $\bar{a}$ ein, so erhalte ich $(a + c)(\bar{a} + d) = (a + c)(\bar{a} + d)(a + c + \bar{a} + d)$. Es hat aber der Faktor $a + c + \bar{a} + d$ wegen des Gegensatzes $a + \bar{a}$ den Wert 1. Es ist nämlich: $a + c + \bar{a} + d = 1 + c + d = 1$. Nun sagt aber das 4. Absorptionsgesetz, dass ich Einen Gegensatz in dem neu gebildeten Faktor unterdrücken darf. Statt $a + \bar{a} + c + d$ darf ich also schreiben $c + d$. So erhalte ich: $(a + c)(\bar{a} + d) = (a + c)(\bar{a} + d)(c + d)$, und das ist das 4. Absorptionsgesetz. Wenn ich hätte $(a + e + c)(\bar{a} + \bar{e} + d)$, so dürfte ich den Faktor $(a + e + c + \bar{a} + \bar{e} + d)$ beifügen. Nach Unterdrückung des Gegensatzes $a + \bar{a}$ bleibt: $e + \bar{e} + c + d = 1$. Den zweiten Gegensatz $e + \bar{e}$ darf ich nicht mehr unterdrücken. Der neue Faktor bleibt also 1, und es wäre vollkommen zwecklos, ihn dem Produkte beifügen zu wollen.

Wenn ich in die Formel $(a + b)(\bar{a} + c) = (a + b)(\bar{a} + c)(b + c)$ für b und c den Wert 0 einsetze, so erhalte ich: $a \cdot \bar{a} = a \cdot \bar{a} \cdot 0$. Da nach dem 4. Ontologiegesetze $a \cdot \bar{a} \cdot 0 = 0$, so habe ich $a\bar{a} = 0$. Das 4. Absorptionsgesetz wird also in diesem besondern Falle zum 4. Tautologiegesetz.

Wenn man in dieselbe Formel bloss für b den Wert 0 einsetzt, so habe ich: $a(\bar{a} + c) = a(\bar{a} + c)c$. Da nach dem 2. Absorptionsgesetze $(\bar{a} + c)c = c$ ist, so habe ich: $a(\bar{a} + c) = ac$. — Es mag gut sein, sich auch diesen besonderen Fall des 4. Absorptionsgesetzes zu merken, nämlich: »Wenn in einem Produkte, wie z. B. $a(\bar{a} + c)$, ein Faktor $(\bar{a} + c)$ das Kontradiktorium $(\bar{a})$ eines Mitfaktors (a) als Summanden einschliesst, so kann man dieses Kontradiktorium $(\bar{a})$ unbeschadet des Wertes des Produktes unterdrücken.«

Die Absorptionsgesetze werden bei unserm Denken häufig angewandt. Sagt z. B. ein Gesetz, dass alle Personen, welche Witwen (a) oder Waisen (b)

sind, Anspruch auf eine Unterstützung haben, so wird auch die Witwe Bertha sich berechtigt fühlen, diese Unterstützung zu verlangen. Denn, denkt sie, jede Person, die Witwe ist, gehört in die Klasse der Personen, welche Witwen oder Waisen sind d. h. $a = a(a+b)$. Man sieht, Bertha hat das zweite Absorptionsgesetz angewandt. — Auf dem dritten Absorptionsgesetz beruht, wie wir sehen werden, die Evolution der Summen und Nullgleichungen, folglich auch der Syllogismus und alle Schlussfolgerungen.

### Beispiele.

a) Beispiele zum 1. Absorptionsgesetze und seiner Umkehrung.

1. $a = a + ade$.
2. $a + bc + amn + bcde = a + bc$.
3. $a + bc + (a+bc)m = a + bc$.
4. $(ax+by)(a+b) = ax + abx + aby + by = ax + by$.
5. $(a+b)(a+c) = aa + ac + ba + bc = a + ac + ab + bc = a + bc$.

b) Beispiele zum 2. Absorptionsgesetze und seiner Umkehrung.

1. $a = a(a+d+e)$.
2. $a(b+c)(a+m+n)(b+c+d+e) = a(b+c)$.
3. $a(b+c)[a(b+c)+m] = a(b+c)$.
4. $(a+x)(b+y)+ab = (a+x)(a+x+b)(b+y+a)(b+y) = (a+x)(b+y)$.
5. $ab + ac = (a+a)(a+c)(b+a)(b+c) = a(a+c)(a+b)(b+c) = a(b+c)$.

c) Beispiele zum 3. Absorptionsgesetze und seiner Umkehrung.

1. $abc + \bar{a}d = abc + \bar{a}d + bcd$.
2. $abce + ab\bar{e}f + abcf = abce + ab\bar{e}f$.
3. $a + \bar{a}b = a + \bar{a}b + b = a + b$.
4. $abc + \bar{a}c = abc + \bar{a}c + bc = \bar{a}c + bc = (\bar{a}+b)c$.
5. $(a+x)(b+\bar{x}) = ab + a\bar{x} + bx + x\bar{x} = ab + a\bar{x} + bx = a\bar{x} + bx$.
6. $(abx + ab\bar{x} = abx + ab\bar{x} + ab = ab$.

d) Beispiele zum 4. Absorptionsgesetze und seiner Umkehrung.

1. $(a+b+c)(\bar{a}+d) = (a+b+c)(\bar{a}+d)(b+c+d)$.
2. $(a+b+c+e)(a+b+\bar{e}+f)(a+b+c+f) = (a+b+c+e)(a+b+\bar{e}+f)$.
3. $a(\bar{a}+b) = ab$.
4. $(a+b+c)(\bar{a}+c) = (b+c)(\bar{a}+c) = \bar{a}b + c$.
5. $ax + b\bar{x} = (a+b)(a+\bar{x})(b+x)(x+\bar{x}) = (a+\bar{x})(b+x)$.
6. $(a+b+x)(a+b+\bar{x}) = (a+b+x)(a+b+\bar{x})(a+b) = a+b$.



Ich füge einige Beispiele bei zur Einübung aller bisherigen Sätze:

a) Man verwandele die folgenden Produkte in Summen:

1. $(a+e)(\bar{a}+\bar{e}) = a\bar{e} + \bar{a}e$.
2. $(a+b)(a+c)(b+d) = ab + ad + bc$.
3. $(a+e)(\bar{a}+c)(\bar{e}+c) = ac + ce$.
4. $(a+b)(\bar{a}+b) = b$.
5. $(a+e)\bar{a}\bar{e} = 0$.
6. $(\bar{a}e + \bar{a}\bar{\imath} + \bar{u})(\bar{a}u + \bar{e}) = \bar{a}eu + \bar{a}\bar{\imath}u + \bar{a}\bar{\imath}\bar{e} + \bar{e}\bar{u}$.

b) Man verwandele die folgenden Summen in Produkte:

1. $ae + ai + ei = (a+e)(a+i)(e+i)$ *).
2. $a\bar{e} + \bar{a}\bar{\imath} = (a+\bar{\imath})(\bar{a}+\bar{e})$.
3. $ae + ai + eu = (a+e)(a+u)(e+i)$.
4. $ae + \bar{a}\bar{\imath} + \bar{e}\bar{\imath} = (a+\bar{\imath})(e+\bar{\imath})$.

c) Vermischte Beispiele.

1. Addiere a zur Summe: $ai + \bar{a}u + en + iu$. Resultat: $a + u + en$.
2. Addiere a zum Produkte: $(a+i)(\bar{a}+u)(e+u)(i+u)$. Resultat: $(a+i)(a+e+u)$.
3. Multipliziere a mit der Summe: $ai + \bar{a}u + eu + iu$. Resultat: $ai + aeu$.
4. Multipliziere a mit dem Produkte: $(a+e)(\bar{a}+i)(e+u)(i+u)$. Resultat: $ai(e+u)$.
5. $\bar{a} + a\bar{e} + ae\bar{\imath} = \bar{a} + \bar{e} + \bar{\imath}$.
6. $\bar{a}(a+\bar{e})(a+e+\bar{\imath}) = \bar{a}\bar{e}\bar{\imath}$.
7. $ae + \bar{a}i + a\bar{e}i = (a+i)(e+i) = ae + i$.
8. $(a+e)(\bar{a}+i)(a+\bar{e}+i) = ai + ei = (a+e)i$.
9. Man verwandele alle in diesen Beispielen vorkommenden Gleichungen in ihr Kontradiktorium, z. B. aus $(a+e)(\bar{a}+\bar{e}) = a\bar{e} + \bar{a}\bar{e}$ wird: $\bar{a}\bar{e} + ae = (\bar{a}+e)(a+\bar{e})$.

## IX. Funktionslehre.

Mit den bisher entwickelten Sätzen kann der logische Algorithmus recht wohl auskommen. Wir wollen aber einige Formeln beifügen, welche bei geschickter Anwendung die Rechnung zuweilen erleichtern und abkürzen. Wir müssen einige Erklärungen vorausschicken.

1. $\varphi(x)$ [gelesen: Funktion x] nennen wir einen Ausdruck, welcher aus x und andern Begriffen vermittelst der Addition, Multiplikation und Negation

*) Diese Formel ist, wie man sieht, dual zu sich selbst.

irgendwie zusammengesetzt ist, z. B. $a\,b\,x + \bar{a}\,c + d\,\bar{x}$ ist eine Funktion von x. — x heisst Argument der Funktion.

2. Hat man verschiedene dergleichen Ausdrücke, so nennt man den einen $\varphi_1(x)$, den andern $\varphi_2(x)$ u. s. w.

3. $\overline{\varphi}(x)$ ist die Negation von $\varphi(x)$.

4. Hat man $\varphi(x) = a\,x + b\,\bar{x} + c$, so ist $\varphi(y) = a\,y + b\,\bar{y} + c$;
$\varphi(1) = a \,.\, 1 + b \,.\, \overline{1} + c = a + c$; $\varphi(0) = a \,.\, 0 + b \,.\, \overline{0} + c = b + c$;
$\varphi(a) = a \,.\, a + b\,\bar{a} + c = a + \bar{a}\,b + c = a + b + c$ u. s. w.

5. Man kann, wie wir bald beweisen werden, $\varphi(x)$ stets auf die Form $a\,x + b\,\bar{x}$ bringen, wo a und b das Symbol x gar nicht enthalten. $a\,x + b\,\bar{x}$ heisst dann eine entwickelte Funktion von x; $a\,x + b\,\bar{x}$ ist die Entwickelung von $\varphi(x)$. — a und b heissen die Koeffizienten der entwickelten Funktion; x und $\bar{x}$ heissen die veränderlichen Elemente der Entwicklung.

1. Funktionsgesetz. Man kann jeden beliebigen Ausdruck als entwickelte Funktion von x darstellen.

Beweis. Der zu behandelnde Ausdruck sei $\varphi(y)$. Dann kann ich setzen: $\varphi(y) = \varphi(y) \,.\, [x + \bar{x}] = x \,.\, \varphi(y) + \bar{x} \,.\, \varphi(y)$. — Diesen letzten Ausdruck kann man durch Auflösen aller Klammern sicher auf die Form bringen: $m\,x + n\,x + \ldots + u\,\bar{x} + v\,\bar{x} + \ldots$ Daraus ergibt sich $\varphi(y) = (m + n + \ldots)\,x + (u + v + \ldots)\,\bar{x}$. Dieser Ausdruck hat aber die Form: $a\,x + b\,\bar{x}$, ist also eine entwickelte Funktion von x q. e. d.

2. Funktionsgesetz. $\varphi(x) = \varphi(1) \,.\, x + \varphi(0) \,.\, \bar{x}$*).

Beweis. Man bringe $\varphi(x)$ auf die Form $a\,x + b\,\bar{x}$. Jetzt ist

$$\varphi(x) = a\,x + b\,\bar{x}.$$
$$\varphi(1) = a \,.\, 1 + b \,.\, 0 = a.$$
$$\varphi(0) = a \,.\, 0 + b \,.\, 1 = b.$$

Also $\varphi(x) = \varphi(1) \,.\, x + \varphi(0)\,\bar{x}$ q. e. d.

Anmerkung. Den ähnlichen Satz: $\varphi(x) = [\varphi(0) + x]\,[\varphi(1) + \bar{x}]$ mag der Leser sich selbst aus dem eben aufgestellten Theorem mit Anwendung des ersten Distributions- und vierten Absorptionsgesetzes ableiten.

3. Funktionsgesetz. Jede an oder mit entwickelten Funktionen auszuführende Operation braucht bloss an ihren Koeffizienten zu geschehen**).

Beweis. Es seien $a\,x + e\,\bar{x}$ und $c\,x + d\,\bar{x}$ zwei entwickelte Funktionen von x. Dann ist zu zeigen:

a) $[a\,x + e\,\bar{x}] + [c\,x + d\,\bar{x}] = (a + c)\,x + (e + d)\,\bar{x}$. — Das ist klar.

b) $[a\,x + e\,\bar{x}] \,.\, [c\,x + d\,\bar{x}] = a\,c\,x + e\,d\,\bar{x}$. — Das ist eben so klar.

---

*) Der Satz ist von Boole.

**) In dieser allgemeinen Form findet sich der Satz bei Schröder, Algebra der Logik S. 424.



c) Die Negation von $a\,x + e\,\bar{x}$ ist $\bar{a}\,x + \bar{e}\,\bar{x}$. — Das wird wahr sein, wenn $a\,x + e\,\bar{x} + \bar{a}\,x + \bar{e}\,\bar{x} = 1$, und $(a\,x + e\,\bar{x})\,(\bar{a}\,x + \bar{e}\,\bar{x}) = 0$. Beides ist aber, wie man sofort sieht, der Fall.

Wenn man mit Hilfe dieses Satzes die Negation bildet, so muss man auf den Koeffizienten 0 Acht geben. Die Negation von $a\,x$ ist deshalb nicht $\bar{a}\,x$, sondern $\bar{a}\,x + \bar{x} = \bar{a} + \bar{x}$. Denn $a\,x = a\,x + 0 \,.\, \bar{x}$; die Negation der ersten Seite dieser Gleichung gibt unter Anwendung des eben bewiesenen Satzes: $\bar{a}\,x + \overline{0}^{\,x} = \bar{a}\,x + {}^{x}$.

4. Funktionsgesetz. Welchen Begriff man immer in einer Funktion $\varphi(x) = a\,x + b\,\bar{x}$ die Veränderliche x bezeichnen lässt, es bleibt stets wahr, dass die Funktion eine Klasse von Dingen bezeichnet, deren Umfang die Klasse $a\,b$ einschliesst, aber von der Klasse $a + b$ eingeschlossen wird. Umgekehrt, wenn der Umfang eines Begriffes zwischen $a\,b$ und $a + b$ liegt, kann der Begriff durch passende Wahl von x als $\varphi(x) = a\,x + b\,\bar{x}$ dargestellt werden.

Beweis. Ich habe $\varphi(x) = a\,x + b\,\bar{x}$. Es ist aber $a\,x + b\,\bar{x} = a\,x + b\,\bar{x} + a\,b$. Also schliesst $\varphi(x)$ die Klasse $a\,b$ ein. — Es ist ferner $a + b = a + b + a\,x + b\,\bar{x}$. Also schliesst $a + b$ die Klasse $a\,x + b\,\bar{x} = \varphi(x)$ ein.

Weiterhin, wenn der Umfang eines Begriffes e zwischen $a\,b$ und $a + b$ liegt, so hat jedes $a\,b$ das Merkmal e d. h. $a\,b = a\,b\,e$; es hat auch jedes e das Merkmal $a + b$, d. h. $e = (a + b)\,e$. — Setze ich jetzt in dem Ausdruck $a\,x + b\,\bar{x}$ für x den Wert $\bar{a}\,\bar{e} + a\,e$ ein, so erhalte ich: $\varphi(x) = a\,(a\,e + \bar{a}\,\bar{e}) + b\,(a + e)\,(\bar{a} + \bar{e}) = a\,e + b\,a\,\bar{e} + b\,\bar{a}\,e$. Da aber nach der Unterstellung $a\,b = a\,b\,e$, so ist $b\,a\,\bar{e} = b\,a\,e\,\bar{e} = 0$. Ich habe also $\varphi(x) = a\,e + \bar{a}\,b\,e = a\,e + b\,e = (a + b)\,e$. Nach der Unterstellung ist aber $(a + b)\,e = e$; also $\varphi(x) = e$. — Ich kann also wirklich jedes zwischen $a\,b$ und $a + b$ gelegene e als $\varphi(x)$ darstellen. Ich brauche nämlich bloss $\bar{a}\,\bar{e} + a\,e$ für x in die Funktion einzusetzen q. e. d.

Mithin kann ich jeden beliebigen Ausdruck als Funktion von x darstellen, so lange keine bestimmte Form der Funktion verlangt wird, d. h. so lange die Koeffizienten der entwickelten Funktion noch nicht festgelegt sind. Sobald man aber eine bestimmte Form der Funktion verlangt, d. h. sobald man will, dass die Koeffizienten der entwickelten Funktion die festbestimmten Werte a und b haben sollen, kann ich als Funktion von x nur mehr jene Begriffe darstellen, deren Umfang zwischen $a\,b$ und $a + b$ liegt.

Anmerkung. 1. $\varphi(x, y)$ [gelesen: Funktion x und y] nennen wir einen Ausdruck, welcher aus x, y und andern Termen mit Hilfe der logischen Operationen konstruiert ist. — x und y heissen die Argumente der Funktion.

Man kann jeden beliebigen Ausdruck auf die Form bringen:

$$a\,x\,y + b\,x\,\bar{y} + c\,\bar{x}\,y + d\,\bar{x}\,\bar{y}.$$

Ein solcher Ausdruck, wo a, b, c und d die Symbole x und y nicht mehr enthalten, heisst eine nach x und y entwickelte Funktion.

Aus dem Gesagten ergibt sich, was eine Funktion von drei und mehr Argumenten ist, und wie ein nach mehreren Argumenten entwickelter Ausdruck aussieht.

Ueber die Funktionen mit mehreren Argumenten gelten ganz analoge Sätze, wie über die Funktionen mit Einem Argumente. Da aber solche Funktionen nie oder fast nie praktische Verwendung finden, so begnüge ich mich einen einzigen Satz beizubringen. Der Leser wird ohnehin alles übrige von selbst erraten:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(1, 1, 1)\, x\, y\, z + \varphi(1, 1, 0)\, x\, y\, \bar{z} + \varphi(1, 0, 1)\, x\, \bar{y}\, z + \varphi(1, 0, 0)\, x\, \bar{y}\, \bar{z} + \varphi(0, 1, 1)\, \bar{x}\, y\, z + \varphi(0, 1, 0)\, \bar{x}\, y\, \bar{z} + \varphi(0, 0, 1)\, \bar{x}\, \bar{y}\, z + \varphi(0, 0, 0)\, \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}.$$

2. Die Entwickelung von $\varphi(x) = a\, x + b\, \bar{x}$ kann man auch als Produkt darstellen $\varphi(x) = (a + \bar{x})(b + x)$. a und b heissen die koeffizierenden Summanden dieser Entwickelung. — Man kann die vier Sätze, welche wir eben für die Entwickelung der Funktion in Summen aufgestellt haben, auch auf die Entwickelung in Produkte übertragen. Für mehrere Veränderliche gilt der Satz: $\varphi(x, y, z) = [\varphi(1, 1, 1) + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}]\, [\varphi(1, 1, 0) + \bar{x} + \bar{y} + z]\, [\varphi(1, 0, 1) + \bar{x} + y + \bar{z}]\, [\varphi(1, 0, 0) + \bar{x} + y + z]\, [\varphi(0, 1, 1) + x + \bar{y} + \bar{z}]\, [\varphi(0, 1, 0) + x + \bar{y} + z]\, [\varphi(0, 0, 1) + x + y + \bar{z}]\, [\varphi(0, 0, 0) + x + y + z]$.

Nach diesen Andeutungen können wir die Ausführung der Einzelheiten der Erfindung des Lesers überlassen.

### Beispiele.

Wir wollen uns das 1. und 2. Funktionsgesetz an einigen Beispielen verdeutlichen.

Man soll folgende Ausdrücke als entwickelte Funktion von x darstellen:

1) 0. Resultat: $0 \cdot x + 0 \cdot \bar{x}$.

2) 1. Resultat: $x + \bar{x}$.

3) a. Resultat: $a\, x + a\, \bar{x}$.

4) a x. Resultat: $a\, x + 0 \cdot \bar{x}$.

5) $a\, \bar{x}$. Resultat: $0 \cdot x + a\, \bar{x}$.

6) $(x + m)(\bar{x} + n) + a\, x + b\, \bar{x} + c$. Resultat: $(n + a + c)\, x + (m + b + c)\, \bar{x}$.

Man soll mit Hilfe des 2. Funktionsgesetzes folgenden Ausdruck berechnen:

$$\varphi(x) = (x + a)(x + b + c)(x + \bar{a} + m)(\bar{x} + u)\, \bar{u}.$$

Auflösung: $\varphi(1) = (1 + a)(1 + b + c)(1 + \bar{a} + m)(0 + u)\, \bar{u} = 1.1.1.u.\bar{u} = 0.$

$$\varphi(0) = (0 + a)(0 + b + c)(0 + \bar{a} + m)(1 + u)\bar{u} = a(b + c)(\bar{a} + m)1 \cdot \bar{u} = a\, m\, \bar{u}\, (b + c).$$

Also $\varphi(x) = 0 \cdot x + a\, m\, \bar{u}\, (b + c)\, \bar{x} = a\, m\, \bar{u}\, (b + c)\, \bar{x}$.



## X. Die Entwickelung der Summen.

Ein Summand heisst einfach, wenn er ein einfaches Zeichen oder ein Produkt aus einfachen Zeichen ist, z. B. a, a b c sind einfache Summanden. Ein Faktor heisst einfach, wenn er ein einfaches Zeichen oder eine Summe aus einfachen Zeichen ist. Ein Summand heisst unnütz, wenn er einen Mitsummanden gleich oder wenn er einen Mitsummanden als Faktor enthält, und deshalb nach dem 1. Tautologiegesetz oder nach dem 1. Absorptionsgesetz wegbleiben kann. Ein Summand heisst implicit, wenn er aus zwei andern Summanden der Summe durch Unterdrückung einer Kontradiktion nach dem 3. Absorptionsgesetz abgeleitet und der Summe unbeschadet ihres Wertes beigefügt oder auch weggelassen werden kann; so hat die Summe $a\, e + b\, \bar{e}$ den impliciten Summanden a b. Eine Summe heisst evolviert, wenn alle ihre Summanden einfach sind, wenn sie ferner keine unnützen Summanden enthält und wenn endlich alle impliciten Summanden ausdrücklich beigefügt sind. Die Summe $a + (b + c)\, d$ ist nicht evolviert; denn der zweite Summand ist nicht einfach. Die Summe $a + b + a\, b$ ist nicht evolviert, weil sie den unnützen Summanden a b enthält. Die Summe $a\, e + b\, \bar{e}$ ist nicht evolviert, weil der implicite Summand a b nicht ausgedrückt ist. Dagegen ist die Summe $a\, b + a\, e + b\, \bar{e}$ evolviert. — Eine Nullgleichung heisst evolviert oder entwickelt, wenn auf der einen Seite 0, auf der andern eine evolvierte Summe steht.

Ein gegebener Ausdruck wird in folgender Weise in eine evolvierte Summe verwandelt. Man bringt ihn zuerst auf die Form einer Summe mit lauter einfachen Summanden, was durch Auflösung der Klammern leicht geschieht. Dann streicht man die unnützen Summanden weg. Hierauf vergleicht man den ersten Summanden mit dem zweiten und allen folgenden der Reihe nach und sieht zu, ob sich ein impliciter Summand herausstellt. Ist das der Fall, so schreibt man ihn am Ende der Summe bei und streicht alle etwa unnütz werdenden Summanden weg. Dann vergleicht man in der so veränderten Summe den zweiten Summanden mit dem dritten und allen folgenden, schreibt die sich etwa ergebenden neuen Summanden am Ende bei und streicht die unnütz werdenden Summanden weg. Dann vergleicht man in der neuen Summe den dritten Summanden mit dem vierten und allen folgenden. So fährt man fort, bis man ans Ende aller, auch der von Fall zu Fall sich ergebenden neuen Summanden kommt und nichts mehr zu vergleichen ist. Man hat dann die entwickelte Summe. Es ist aber wohl zu beachten, dass die neuen Summanden zunächst a n s E n d e zu schreiben sind, weil sie mit den vorausgehenden Gliedern in Vergleich gebracht werden

müssen. Ist die Summe fertig entwickelt, so kann man natürlich die Summanden beliebig ordnen. — Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

1. Man soll den Ausdruck $\bar{a}\,\bar{e}\,i + a\,e + (u + \bar{a})\,(u + i)\,(\bar{e} + \bar{a}\,i)$ in eine evolvierte Summe verwandeln. Zuerst stellt man einfache Summanden her, indem man die Klammern auflöst. Man hat: $(u + \bar{a})\,(u + i)\,(\bar{e} + \bar{a}\,i) = (u + \bar{a}\,i)\,(\bar{e} + \bar{a}\,i) = u\,\bar{e} + \bar{a}\,i$ [nach der Umkehrung des ersten Distributionsgesetzes]. — Jetzt ist die ursprüngliche Summe: $\bar{a}\,\bar{e}\,i + a\,e + u\,\bar{e} + \bar{a}\,i$. Der Summand $\bar{a}\,\bar{e}\,i$ ist wegen $\bar{a}\,i$ unnütz; er wird also fortgelassen.

Es bleibt: $a\,e + \bar{a}\,i + u\,\bar{e}$.

Man vergleicht jetzt $a\,e$ mit $\bar{a}\,i$. Es ergibt sich, dass man nach dem dritten Absorptionsgesetz, mit Unterdrückung des Gegensatzes $a\,\bar{a}$, der Summe den impliciten Summanden $e\,i$ beizufügen hat. — Hierauf vergleicht man $a\,e$ und $u\,\bar{e}$. Man findet den impliciten Summanden $a\,u$. Die gefundenen Summanden schreibt man jetzt am Ende bei. Das gibt:

$$a\,e + \bar{a}\,i + u\,\bar{e} + e\,i + a\,u.$$

Jetzt vergleicht man $\bar{a}\,i$ mit $u\,\bar{e}$. Man findet keinen impliciten Summanden, weil es keinen Gegensatz zu unterdrücken gibt. Man vergleicht nun $\bar{a}\,i$ und $e\,i$; es findet sich wiederum nichts. Man vergleicht endlich $\bar{a}\,i$ mit $a\,u$; man findet $i\,u$. Das schreibt man am Ende bei. Die Summe ist jetzt:

$$a\,e + \bar{a}\,i + u\,\bar{e} + e\,i + a\,u + i\,u.$$

Man vergleicht hierauf $u\,\bar{e}$ mit $e\,i$; das gibt den Summanden $i\,u$. Da er aber bereits in der Summe steht, so kann er nicht noch einmal beigefügt werden. Man vergleicht nun $u\,\bar{e}$ mit $a\,u$ und $i\,u$. Man findet nichts. Die Summe bleibt, wie sie war. — Endlich vergleicht man $e\,i$ mit $a\,u$ und $i\,u$, $a\,u$ mit $i\,u$; aber alles, ohne etwas neues zu finden. Es bleibt also bei dem letzten Ausdrucke. Dieser stellt also den ursprünglichen Ausdruck als entwickelte Summe dar.

2. Man soll den Ausdruck $a\,e + u\,\bar{e} + \bar{a}\,e$ in eine entwickelte Summe verwandeln.

Des Ausdruck besteht schon aus einfachen Summanden; er enthält auch keine unnützen Glieder. Man vergleiche also $a\,e$ mit $u\,\bar{e}$; man findet $a\,u$. Man vergleiche hierauf $a\,e$ mit $\bar{a}\,e$; man findet $e$. — Fügt man das Gefundene am Ende bei, so hat man $a\,e + u\,\bar{e} + \bar{a}\,e + a\,u + e$. Aber $a\,e$ und $\bar{a}\,e$ sind jetzt unnütz wegen $e$. Der Ausdruck lautet also:

$$u\,\bar{e} + a\,u + e.$$

Jetzt vergleicht man $u\,\bar{e}$ mit $a\,u$; es gibt nichts neues. Man vergleiche es mit $e$; das gibt $u$. Fügt man $u$ am Ende bei, so werden $u\,\bar{e}$ und $a\,u$ unnütz. Der entwickelte Ausdruck lautet deshalb:

$$e + u.$$



3. Man soll den Ausdruck $\bar{a}\,\bar{e}\,u + \bar{a}\,u\,m + \bar{a}\,u\,n + a\,e + u\,e + r\,\bar{e}$ in eine entwickelte Summe verwandeln.

Der Ausdruck besteht schon aus einfachen Summanden; er enthält auch keine unnützen Glieder. Man vergleicht $\bar{a}\,\bar{e}\,u$ mit $\bar{a}\,u\,m$ und $\bar{a}\,u\,n$ ohne Resultat, weil kein Gegensatz zu unterdrücken ist. Der Vergleich mit $a\,e$ führt ebenfalls zu nichts, weil ein mehrfacher Gegensatz ($a\,\bar{a}$ und $e\,\bar{e}$) vorliegt. Der Vergleich mit $u\,e$ ergibt den impliciten Summanden $\bar{a}\,u$. Die Vergleichung mit $r\,\bar{e}$ ist vergeblich. — Fügt man $\bar{a}\,u$ am Ende bei, so werden $\bar{a}\,\bar{e}\,u$, $\bar{a}\,u\,m$, $\bar{a}\,u\,n$ unnütz. Der Ausdruck lautet also:

$$a\,e + u\,e + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u.$$

Vergleicht man jetzt $a\,e$ mit den folgenden Gliedern, so finden wir die Summanden $a\,r$ und $u\,e$. Da $u\,e$ bereits in der Summe steht, kann es nicht noch einmal beigefügt werden. Der Ausdruck lautet jetzt:

$$a\,e + u\,e + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u + a\,r.$$

Vergleicht man jetzt $u\,e$ mit den folgenden Gliedern, so findet man den Summanden $u\,r$. Dies am Ende beigefügt, gibt:

$$a\,e + u\,e + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u + a\,r + u\,r.$$

Damit ist die Entwickelung vollendet. Denn der Vergleich von $r\,\bar{e}$ mit den folgenden Gliedern führt zu nichts; eben so wenig der Vergleich von $\bar{a}\,u$ und $a\,r$.

4. Man soll den Ausdruck $a\,e + a\,m\,\bar{e} + \bar{a}\,i + \bar{a}\,n\,\bar{i}$ in eine entwickelte Summe verwandeln.

Der Ausdruck besteht schon aus einfachen Summanden; er enthält auch keine unnützen Glieder. Man vergleicht $a\,e$ mit den folgenden Summanden und findet $a\,m$, $e\,i$ und $e\,n\,\bar{i}$. Fügt man diese Summanden am Ende bei und lässt das unnütz werdende $a\,m\,\bar{e}$ weg, so lautet der Ausdruck:

$$a\,e + \bar{a}\,i + \bar{a}\,n\,\bar{i} + a\,m + e\,i + e\,n\,\bar{i}.$$

Jetzt vergleicht man $\bar{a}\,i$ mit den folgenden Gliedern und findet $\bar{a}\,n$, $m\,i$ und $\bar{a}\,e\,n$. Das Glied $\bar{a}\,e\,n$ muss aber wegbleiben, da es unnütz ist wegen $\bar{a}\,n$. Fügt man diese Summanden am Ende bei und lässt das unnütze $\bar{a}\,n\,\bar{i}$ weg, so hat man:

$$a\,e + \bar{a}\,i + a\,m + e\,i + e\,n\,\bar{i} + \bar{a}\,n + m\,i.$$

Nun vergleicht man $a\,m$ mit den folgenden Gliedern und findet $m\,n$. Der Ausdruck wird:

$$a\,e + \bar{a}\,i + a\,m + e\,i + e\,n\,\bar{i} + \bar{a}\,n + m\,i + m\,n.$$

Nun vergleicht man $e\,i$ mit den folgenden Gliedern. Man findet $e\,n$, wodurch $e\,n\,\bar{i}$ unnütz wird. Der Ausdruck wird:

$$a\,e + \bar{a}\,i + a\,m + e\,i + e\,n + \bar{a}\,n + m\,i + m\,n.$$

Damit ist die Entwickelung vollendet. Denn alle weitern Vergleichungen führen zu nichts.

Anmerkung. Wie man Summen entwickelt, so könnte man auch ganz analog eine Entwickelung von Produkten ausbilden. Wir überlassen das dem Leser, weil es sehr leicht ist. Zudem werden wir niemals von der Entwickelung von Produkten praktischen Gebrauch machen.

## XI. Die Reduktion der Summen.

In einem gewissen Gegensatz zur Evolution steht die Reduktion von Summen. Eine Summe heisst reduziert, wenn sie aus einer evolvierten Summe entsteht, indem man alle impliciten Summanden weglässt, so weit es möglich ist, ohne den Wert der Summe zu ändern. Die reduzierte Summe unterscheidet sich also von einer gleichwertigen evolvierten dadurch, dass die evolvierte Summe alle impliciten Summanden ausdrücklich enthält, die reduzierte Summe aber alle weglässt. Der evolvierten Summe kann man keinen neuen Summanden, falls er nicht etwa unnütz ist, beifügen, ohne ihren Wert zu ändern; in der reduzierten Summe kann man keinen Summanden weglassen, ohne den Wert zu ändern. Die Summanden der reduzierten Summe finden sich sämtlich in der evolvierten, welche ihr gleich ist; aber die Summanden der evolvierten Summe stehen oft nicht alle in der reduzierten. Die Summe $ab + \bar{a}e$ und $ab + \bar{a}e + be$ sind einander gleich; aber die erste ist eine reduzierte Summe, weil, sobald ein Summand wegfällt, die Summe ihre Bedeutung ändert; die zweite ist eine evolvierte Summe, weil man ihr keinen weitern Summanden beifügen kann, da alle impliciten Summanden schon ausgedrückt sind. Die erste Summe ist die Reduktion der zweiten, die zweite ist die Evolution der ersten. — Die Summe $a + b$ ist evolviert und reduziert zugleich.

Ein gegebener Ausdruck wird in folgender Weise in eine reduzierte Summe verwandelt. Man bringt ihn zuerst auf die Form einer Summe mit lauter einfachen Summanden, was durch Auflösung der Klammern leicht geschieht. Dann streicht man die unnützen Summanden weg. Dann evolviert man die Summe. Endlich reduziert man sie. Das dabei zu beobachtende Verfahren erklärt sich am besten durch Beispiele. Ich wähle dieselben, welche wir bei der Evolution von Summen anwandten.

1. Man soll die evolvierte Summe $ae + \bar{a}i + u\bar{e} + ei + au + iu$ reduzieren.

Man vergleiche $ae$ mit $\bar{a}i$. Man erkennt, dass ich in der Summe $ae + \bar{a}i$, unbeschadet ihres Wertes, den Faktor $ei$ beischreiben oder weglassen kann. Ich notiere mir also: »$ei$ aus $ae + \bar{a}i$«. Dann vergleiche ich $ae$ und $u\bar{e}$. Der Summe $ae + u\bar{e}$ kann ich nach Belieben $au$ beifügen oder nicht beifügen. Ich notiere also: »$au$ aus $ae$ und $u\bar{e}$«. Dann vergleiche ich $ae$ und $ei$. Das gibt nichts zu notieren; ebensowenig der Vergleich von $ae$ mit $au$ und $iu$.



Nun vergleiche ich $\bar{a}i$ mit $u\bar{e}$; dann mit $ei$; in beiden Fällen finde ich nichts zu notieren. Dagegen finde ich beim Vergleich mit $au$: »$iu$ aus $\bar{a}i$ und $au$«. $\bar{a}i$ und $iu$ geben keine weitere Notiz.

Nun vergleiche ich $u\bar{e}$ mit den folgenden Gliedern $ei$, $au$ und $iu$. Ich finde: »$iu$ aus $u\bar{e}$ und $ei$«.

Nun vergleiche ich $ei$ mit $au$ und $iu$, ebenso $au$ mit $iu$; es gibt nichts zu notieren. Damit ist die Vergleichung beendet. Ich habe jetzt notiert:

$ei$ aus $ae$ und $\bar{a}i$,
$au$ aus $ae$ und $u\bar{e}$,
$iu$ aus $\bar{a}i$ und $au$,
$iu$ aus $u\bar{e}$ und $ei$.

Ich kann also aus der evolvierten Summe $ei$ wegstreichen; nur müssen dann $ae$ und $\bar{a}i$ sicher stehen bleiben. Ich kann auch dazu $au$ wegstreichen; $ae$ und $u\bar{\imath}$ müssen jetzt bleiben. Ich kann endlich $iu$ wegstreichen; $\bar{a}i$ und $au$ oder $u\bar{e}$ und $ei$ müssen jetzt bleiben. — Ich darf also $ei$ und $au$ und $iu$ alle drei zugleich weglassen. Die reduzierte Summe lautet:

$$ae + \bar{a}i + u\bar{e}.$$

2. Man soll die evolvierte Summe $e + u$ reduzieren. Man sieht, dass da nichts zu machen ist. Die evolvierte Summe ist zugleich reduziert.

3. Man soll die evolvierte Summe $ae + eu + r\bar{e} + \bar{a}u + ur + ar$ reduzieren.

Durch Vergleich der Summanden ergeben sich die Notizen:

$ar$ aus $ae$ und $r\bar{e}$,
$eu$ aus $ae$ und $\bar{a}u$,
$ur$ aus $eu$ und $r\bar{e}$,
$ur$ aus $\bar{a}u$ und $ar$.

Ich kann also $ar$ weglassen; nur darf ich dann nicht an $ae$ und $r\bar{e}$ rühren. Ich kann dazu $eu$ weglassen; nur darf ich dann nicht an $ae$ und $\bar{a}u$ rühren. Ich kann $ur$ weglassen; nur müssen dann $eu$ und $r\bar{e}$ bleiben; da ich aber bereits $eu$ gestrichen habe, muss $ur$ bleiben. Ich kann noch einmal $ur$ weglassen; nur müssen dann $\bar{a}u$ und $ar$ bleiben; da ich aber $ar$ bereits gestrichen habe, muss $ur$ definitiv bleiben. — Ich kann also nur $ar$ und $eu$ streichen.

Nun will ich aber $ar$ nicht weglassen. Dann kann ich $eu$ streichen, weil $ae$ und $\bar{a}u$ bleiben. Ich kann auch $ur$ streichen, weil $\bar{a}u$ und $ar$ bleiben.

Nun will ich $ar$ wieder streichen, aber $eu$ lassen. Dann kann ich wieder $ur$ streichen, weil $eu$ und $r\bar{e}$ bleiben.

Es gibt also drei reduzierte Summen:

$$a\,e + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u + u\,r,$$
$$a\,e + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u + a\,r,$$
$$a\,e + e\,u + r\,\bar{e} + \bar{a}\,u.$$

Aus diesem Beispiele ersieht man, dass die Reduktion einer Summe zuweilen in verschiedenen Formen gegeben werden kann.

4. Man soll die evolvierte Summe

$$a\,e + \bar{a}\,i + a\,m + e\,i + e\,n + \bar{a}\,n + m\,i + m\,n$$ reduzieren.

Durch Vergleich der Summanden ergibt sich:

e i aus a e und ā i,
e n aus a e und ā n,
m i aus ā i und a m,
m n aus a m und ā n.

Ich sehe sofort, dass ich e i, e n, m i und m n gleichzeitig weglassen darf. Die reduzierte Summe ist:

$$a\,e + \bar{a}\,i + a\,m + \bar{a}\,n.$$

Anmerkung. Wie man eine Summe reduziert, so könnte man auch ganz analog eine Reduktion von Produkten ausbilden. Wir überlassen das dem Leser, weil im Folgenden die Reduktion von Produkten keine praktische Verwendung findet*).

## XII. Die Aequivalenz der logischen Gleichungen.

Gleichungen heissen äquivalent, äquipollent, gleichbedeutend, gleichwertig, wenn sie gegenseitig die eine aus der andern sich ableiten lassen.

1. Aequivalenzgesetz: Die Gleichungen $a\,x = 0$ und $x = x\,\bar{a}$ sind äquivalent.

2. Aequivalenzgesetz: Die Gleichungen $a\,\bar{x} = 0$ und $x = x + a$ sind äquivalent.

3. Aequivalenzgesetz: Die Gleichungen $a + \bar{x} = 1$ und $x = x\,.\,a$ sind äquivalent.

4. Aequivalenzgesetz: Die Gleichungen $a + x = 1$ und $x = x + \bar{a}$ sind äquivalent.

Beweis. Für 1. Wenn $a\,x = 0$, so ist $x = x\,(a + \bar{a}) = x\,a + x\,.\,\bar{a} = 0 + x\,.\,\bar{a} = x\,\bar{a}$. Umgekehrt wenn $x = x\,\bar{a}$, so ist $a\,.\,x = a\,.\,x\,\bar{a} = 0$ q. e. d.

*) Die Evolution und Reduktion der Summen (oder Produkte) ist bisher von keinem Autor, der über den logischen Algorithmus schrieb, behandelt worden. Und doch werden wir sehen, dass hierin, und besonders in der Evolution der Summen, der ganze Logikkalkül gipfelt.



Für 2. Wenn $a\,\bar{x} = 0$, so ist $x = x + a\,\bar{x} = x + a\,x + a\,x = x + a$. Umgekehrt wenn $x = x + a$, so ist $a\,\bar{x} = a\,.\,\bar{x}\,\bar{a} = 0$ q. e. d.

Für 3. Nach unserm zweiten Satz sind $a\,\bar{x} = 0$ und $x = x + a$ äquivalent; also auch ihre Negationen $\bar{a} + x = 1$ und $\bar{x} = \bar{x}\,\bar{a}$. Da die Aequivalenz für jeden Wert von a und x gilt, so setze man für a das Zeichen $\bar{a}$ und für x das Zeichen $\bar{x}$. Dann haben wir $a + \bar{x} = 1$ und $x = x\,a$ sind äquivalent q. e. d.

Für 4. Nach unserm ersten Satz sind $a\,x = 0$ und $x = x\,\bar{a}$ äquivalent; also auch ihre Negationen $\bar{a} + \bar{x} = 1$ und $\bar{x} = \bar{x} + a$. Setzt man, wie vorhin, andere Zeichen ein, so ergibt sich: $a + x = 1$ und $x = x + \bar{a}$.

### Beispiele.

Das 1. und 2. Aequivalenzgesetz sind von entscheidender Wichtigkeit für die kommenden Untersuchungen. Sie dienen dazu, um aus einer Nullgleichung Aufschluss über die in derselben enthaltenen Begriffe zu bekommen. Das 1. Gesetz dient auch dazu, um eine gegebene Gleichung in eine äquivalente Nullgleichung zu verwandeln. Wir wollen uns deshalb durch einige Beispiele an den Gebrauch dieser Sätze gewöhnen. — Das 3. und 4. Aequivalenzgesetz werden wir in der Folge nicht anwenden; ich habe sie bloss der Symmetrie wegen angeführt.

a) Man verwandele folgende Gleichungen in äquivalente Nullgleichungen:

1. $s = s\,\bar{p}$. Resultat: $s\,p = 0$.
2. $s = s\,p$. Resultat: $s\,\bar{p} = 0$.
3. $s = s\,(a + \bar{e})$. Resultat: $s\,\bar{a}\,e = 0$.
4. $s(b\,m + n) = s(b\,m + n)\,(a\,e + \bar{a}\,\bar{e})$. Resultat: $s\,(b\,m + n)\,(\bar{a}\,e + a\,\bar{e}) = 0$

b) Man eruiere a aus folgenden Nullgleichungen:

1. $a\,e = 0$. Resultat: $a = a\,\bar{e}$.
2. $a\,\bar{e} = 0$. Resultat: $a = a\,e$.
3. $\bar{a}\,e = 0$. Resultat: $a = a + e$.
4. $\bar{a}\,\bar{e} = 0$. Resultat: $a = a + \bar{e}$.
5. $a\,(e + u) = 0$. Resultat: $a = a\,\bar{e}\,\bar{u}$.
6. $a\,(e\,i + \bar{e}\,\bar{\imath}) = 0$. Resultat: $a = a\,(e\,\bar{\imath} + \bar{e}\,i)$.
7. $\bar{a}\,(m + n\,r) = 0$. Resultat: $a = a + m + n\,r$.

## XIII. Die Interpretationsgesetze der Gleichungen.

Nunmehr bringen wir einige Sätze, welche uns dienlich sind, um aus logischen Gleichungen Urteile abzulesen. Wir nennen sie deshalb Interpretationsgesetze.

1. Interpretationsgesetz: Wenn ein Begriff gleich ist einer Summe aus sich und andern Summanden, so ist er auch gleich einer Summe aus sich und Einem oder beliebig vielen jener Summanden, z. B. wenn $a = a + b + c + d$, so ist $a = a + b = a + d = a + c + d$.

2. Interpretationsgesetz: Wenn ein Begriff gleich ist einem Produkte aus sich und andern Faktoren, so ist er auch gleich einem Produkte aus sich und Einem oder beliebig vielen jener Faktoren, z. B. wenn $a = a\,b\,c\,d$, so ist $a = a\,c = a\,b\,d$.

3. Interpretationsgesetz: Wenn eine Summe einem Begriffe gleich ist, so kann ich alle Summanden, unbeschadet des Wertes dieser Summanden, mit jenem Begriffe multiplizieren, z. B. wenn $a = b + c$, so ist $b = a\,b$, $c = a\,c$.

4. Interpretationsgesetz: Wenn ein Produkt einem Begriffe gleich ist, so kann ich zu allen Faktoren, unbeschadet des Wertes dieser Faktoren, jenen Begriff addieren, z. B. wenn $a = b\,c$, so ist $b = a + b$, $c = a + c$.

Beweis. Für 1. Wenn $a = a + b + c + d$, so kann ich nach dem vierten Grundsatz beiderseits mit $a + b$ multiplizieren. Das gibt $a\,(a + b) = (a + b)\,(a + b + c + d)$ oder, indem ich beiderseits das zweite Absorptionsgesetz anwende, $a = a + b$ q. e. d.

Für 2. Wenn $a = a\,b\,c\,d$, so kann ich beiderseits nach dem dritten Grundsatz $a\,b$ addieren. Das gibt $a + a\,b = a\,b\,c\,d + a\,b$ oder, indem ich beiderseits das erste Absorptionsgesetz anwende, $a = a\,b$ q. e. d.

Für 3. Wenn $a = b + c$, so ist $a\,b = (b + c)\,b = b$ q. e. d.

Für 4. Wenn $a = b\,c$, so ist $a + b = b\,c + b = b$ q. e. d.

Zusatz. Wenn $0 = b + c$, so folgt nach dem dritten unserer Sätze $b = b\,.\,0 = 0$; ebenso $c = c\,.\,0 = 0$ d. h.

Ist eine Summe Null, so sind alle Summanden Null.

Dieser an sich selbstverständliche Satz ist von grosser Wichtigkeit. Sind nämlich viele Nullgleichungen gegeben, so kann man sie alle in eine einzige zusammenziehen, z. B. aus $b = 0$ und $c = 0$, bildet man $b + c = 0$. Die Gleichung $b + c = 0$ ist den beiden andern äquivalent. — Da man überdies alle gegebenen Gleichungen in Nullgleichungen verwandeln kann, so besitzen wir ein Mittel, alle Daten durch Eine Gleichung darzustellen. Die Diskussion dieser Gleichung muss dann die gestellten Probleme lösen.

Analog gilt der Satz: Ist ein Produkt 1, so sind alle Faktoren 1.

Ueber die Anwendung der Interpretationsgesetze wird man den nötigen Aufschluss später finden im Kapitel XV. über die Verwandlung der Gleichungen in Urteile.



## XIV. Das zusammengesetzte Aequivalenzgesetz.

Unsere Aequivalenzsätze haben sich bisher nur mit Gleichungen von der Form $x = x\,.\,a$ oder $s = s\,p$ befasst. Bevor wir weitergehen, müssen wir eine äquivalente Nullgleichung für $s = p$ suchen. Die Gleichung $s = p$ ist äquivalent mit den beiden Gleichungen $s = s\,p$ und $p = s\,p$. Denn nach der Definition besagt $s = p$ nichts als die beiden Urteile: jedes s ist p, und jedes p ist s. Das erste Urteil wird aber äquivalent dargestellt durch die Gleichung $s = s\,p$ (d. h. jedes s ist s und p; und jedes Wesen, das s und p ist, ist s); das zweite entspricht der Gleichung $p = p\,s$. — Uebrigens lässt sich das auch in folgender Weise zeigen: Wenn ich habe $s = p$, so folgt $s = s\,p$ (indem ich beiderseits mit s multipliziere) und $p = s\,p$ (indem ich beiderseits mit p multipliziere). Und umgekehrt, wenn ich die beiden Gleichungen $s = s\,p$ und $s\,p = p$ habe, so folgt nach dem zweiten Grundsatze $s = p$.

Nun ist die Gleichung $s = s\,p$ äquivalent der Nullgleichung $s\,\bar{p} = 0$; die Gleichung $p = s\,p$ ist äquivalent mit $\bar{s}\,p = 0$ (nach dem 1. Aequivalenzgesetze). Folglich ist die Gleichung $s = p$ äquivalent mit den beiden Nullgleichungen $s\,\bar{p} = 0$ und $s\,p = 0$. Diese beiden Gleichungen aber sind, wie wir eben gesehen haben, äquivalent der Einen Nullgleichung $s\,\bar{p} + \bar{s}\,p = 0$. — Mithin ergibt sich das wichtige zusammengesetzte Aequivalenzgesetz:

Die Gleichungen $s = p$ und $s\,\bar{p} + \bar{s}\,p = 0$ sind äquivalent.

Nunmehr können wir mit grösster Leichtigkeit jede gegebene Gleichung in eine Nullgleichung verwandeln. Das eben aufgestellte Theorem schliesst übrigens, wie man sieht, das 1. und 2. Aequivalenzgesetz als einen besonderen Fall in sich ein.

Anmerkung. Das Urteil $s = p$ ist auch äquivalent der Einsgleichung: $(s + \bar{p})\,(\bar{s} + p) = 1$. Wir werden von diesem Satze in der Folge keinen Gebrauch machen.

### Beispiele.

Man soll folgende Gleichungen in äquivalente Nullgleichungen verwandeln.

1. $a = e\,i$. Resultat: $a\,\bar{e} + a\,\bar{\imath} + \bar{a}\,e\,i = 0$.
2. $a = e + i$. Resultat: $a\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{a}\,e + \bar{a}\,i = 0$.
3. $a = a + e$. Resultat: $\bar{a}\,e = 0$.
4. $a = a\,e$. Resultat: $a\,\bar{e} = 0$.
5. $a = e + a\,i$. Resultat: $a\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{a}\,e = 0$.
6. $a + i = a\,u + e\,i$. Resultat: $(a + i)\,(\bar{a} + \bar{u})\,(\bar{e} + \bar{\imath}) = (a\,\bar{u} + \bar{a}\,i + i\,\bar{u})\,(\bar{e} + \bar{\imath}) = (a\,\bar{u} + \bar{a}\,i)\,(\bar{e} + \bar{\imath}) = a\,\bar{e}\,\bar{u} + a\,\bar{\imath}\,\bar{u} + \bar{a}\,\bar{e}\,i = 0$.

## XV. Die Verwandlung der Urteile in Gleichungen.

Die partikulären Urteile, mit denen sich übrigens der Logikkalkül nur nebenbei beschäftigt, stellen wir durch eine Ungleichheit dar. Das Urteil: Einige Menschen (s) sind weiss (p), nimmt deshalb die Form an: $s\,p > 0$.

Dies vorausgeschickt, hat die Verwandlung der Urteile in Gleichungen keine Schwierigkeiten mehr. Wir machen dies Verfahren an Beispielen klar.

1. Einige Menschen (s) sind weiss (p). — In Zeichen: $s\,p > 0$.
2. Einige Menschen sind nicht weiss. — In Zeichen: $s\,\bar{p} > 0$.
3. Alle Menschen sind weiss. — In Zeichen: $s = s\,p$.
4. Kein Mensch ist weiss. — In Zeichen: $s = s\,\bar{p}$.
5. Alle Menschen (s) sind sprachbegabt (p) und alle sprachbegabten Wesen sind Menschen. — In Zeichen: $s = p$.

Die Gleichung $s = s\,p$ kann man auch lesen: Wenn s ist, dann ist p; d. h. die Fälle, in denen s ist, sind auch Fälle, in denen p ist. — Diese Andeutungen werden dem Leser genügen.

Die Gleichungen kann man durch Anwendung der Aequivalenzsätze in Nullgleichungen verwandeln. $s = s\,p$ wird $s\,\bar{p} = 0$; $s = s\,\bar{p}$ wird $s\,p = 0$; $s = p$ wird $s\,\bar{p} + \bar{s}\,p = 0$. Man gewöhne sich, so viel als möglich, jedes allgemeine Urteil sofort ohne weitere Umwege durch eine Nullgleichung auszudrücken. Hat man mehrere Nullgleichungen, so zieht man sie in eine einzige zusammen, wie wir schon auseinandersetzten.

Hat man mehrere Ungleichheiten, z. B. $a\,b > 0$, $c\,d > 0$ u. s. w., so ziehen wir sie in eine einzige zusammen nach folgendem Schema: $a\,b,\ c\,d,\ e\,f \ldots > 0$. Dieser Ausdruck bedeutet also: Einige a sind b, und einige c sind d, und einige e sind f, und ....

Anmerkung. 1. Aus dem Gesagten ergibt sich: $a\,b = 0$ und $a\,b > 0$ sind kontradiktorische Urteile. In ähnlicher Weise sind $a\,b + c\,d = 0$ und $a\,b + c\,d > 0$ kontradiktorisch. Letztere Formel bedeutet also: Wenigstens einer der Ausdrücke a b und c d ist grösser als 0. Eben so sind entgegengesetzt die Urteile $a\,b,\ c\,d > 0$ und $a\,b,\ c\,d = 0$. Letzteres Schema besagt folglich: Wenigstens einer der Ausdrücke a b und c d ist Null.

2. Man kann auch Ungleichheiten bilden, in welchen 1 dieselbe Rolle spielt, wie 0 in den vorigen. Es sind dann kontradiktorische Gegensätze: $a + b = 1$ und $a + b < 1$; $(a + b)(c + d) = 1$ und $(a + b)(c + d) < 1$. $a + b,\ c + d < 1$ und $a + b,\ c + d = 1$. Von diesen Formeln machen wir im Folgenden keinen Gebrauch. Wir enthalten uns deshalb einer weitern Erläuterung derselben, zumal der Leser leicht aus sich selbst die Bedeutung jener Zeichen finden kann.



3. Die Autoren über den Logikkalkül haben bisher vielfach ein unbestimmtes Quantitätssymbol v gebraucht, so dass s jeden Menschen, v s einige Menschen bezeichnet. Diese Autoren schreiben also »Alle Menschen (s) sind sterblich (p)«: $s = v\,p$. Jevons hat dieses Symbol beseitigt und für die allgemeinen Urteile die von uns adoptierte Bezeichnung gewählt. Dafür wird er von Wundt*) mit Unrecht getadelt. Denn das Symbol v ist überflüssig und für den Fortgang der Rechnung störend**).

## XVI. Die Verwandlung der Gleichungen in Urteile.

Wir machen dieses Verfahren an Beispielen klar.

1. $a = a\,b$. — Diese Gleichung wird äquivalent ausgedrückt durch das Urteil: Jedes a ist b.

2. $a = a\,b\,c\,d$. — Diese Gleichung wird äquivalent ausgedrückt durch das Urteil: Jedes a ist b und c und d. — Aus derselben Gleichung kann man verschiedene inadäquate Urteile ablesen, z. B. jedes a ist b; jedes a ist c und d. Dabei findet das 2. Interpretationsgesetz seine Anwendung. Aus $a = a\,b\,c\,d$ folgt nämlich: $a = a\,b$; $a = a\,c\,d$.

3. $a = b$. — Diese Gleichung wird äquivalent ausgedrückt durch das zusammengesetzte Urteil: Jedes a ist b und b jedes b ist a. — Aus derselben Gleichung kann man die inadäquaten Urteile ablesen: jedes a ist b, d. h. $a = a\,b$; sowie jedes b ist a, d. h. $b = a\,b$.

4. $a = b\,c\,d$. — Diese Gleichung wird äquivalent ausgedrückt durch das zusammengesetzte Urteil: Jedes a ist b und c und d, und jedes Wesen, welches b und c und d ist, ist a. — Aus derselben Gleichung kann man nach dem 2. Interpretationsgesetze, weil $a = a\,b\,c\,d$, viele inadäquate Urteile ablesen, z. B. jedes a ist b; jedes a ist c und d. Man hüte sich aber sehr umgekehrt zu lesen: jedes b ist a; jedes Wesen, das c und d ist, ist a.

5. $a = a + b$. — Diese Gleichung wird äquivalent ausgedrückt durch das Urteil: Jedes b ist a; ebenso durch das Urteil: Die Klasse der a besteht aus der Klasse b und einigen andern Wesen.

Wir sagen, die Gleichung werde äquivalent ausgedrückt durch das Urteil: Jedes b ist a. Die Gleichungen $b = a\,b$ und $a = a + b$ sind also äquivalent. Dass dem wirklich so ist, ergibt sich daraus, dass sie derselben Nullgleichung $\bar{a}\,b = 0$ äquivalent sind. — Man könnte also das Urteil »Alle

---

*) Logik I S. 230.

**) Andere Autoren brauchen andere Zeichen. Doch hat unsere Bezeichnung grosse Vorteile und keine Nachteile.

Menschen (s) sind weiss« auch durch $p = s + p$, statt durch $s = sp$ ausdrücken; doch liegt die letztere Bezeichnung unserm Denken näher.

Wenn wir $a = a + b$ durch »jedes b ist a«, d. h. $b = ab$ ausdrücken, so wenden wir, wie man sieht, das 3. Interpretationsgesetz an.

6. $a = a + b + c + d$. — Aequivalent ist das Urteil: Die Klasse a besteht aus den Klassen b, c und d und einigen andern Wesen. Besondere Beachtung verdienen die inadäquaten Urteile: Jedes b ist a; jedes c ist a u. s. w. Oder: wenn b ist, ist a; wenn d ist, ist a u. s. w.

7. $a = b + c + d$. — Aequivalent ist das Urteil: Die Klasse a besteht aus den Klassen b, c und d. — Man beachte, wie vorhin, die inadäquaten Urteile: jedes b ist a u. s. w.

8. $a = ab + c$. — Aequivalent ist das Urteil: Die Klasse a besteht aus der Klasse c und einigen b.

9. $a = a + ab + c$. — Aequivalent ist das Urteil: Die Klasse a besteht aus der Klasse c und einigen b und einigen andern Wesen.

10. $abc > 0$. — Aequivalent ist das Urteil: Einige a sind b und c. Doch beachte man auch die inadäquaten Urteile: Einige a sind c; einige b sind c; einige c sind a; einige c sind b u. s. w. Hier merke man sich den Satz: Ist ein Produkt grösser als Null, so ist jeder Faktor grösser als Null. Diesem Satz entspricht dual ein anderer, den wir aber nicht gebrauchen werden: Ist eine Summe kleiner als 1, so ist jeder Summand kleiner als 1.

## XVII. Prüfung des gegenseitigen Verhältnisses der Urteile durch den Kalkül.

Die Aequivalenzgesetze geben uns ein treffliches Mittel an die Hand, den Zusammenhang verschiedener Urteile zu erkennen. Führen mehrere Urteile zu einer identischen Nullgleichung, so sind sie äquivalent und es folgt das eine aus dem andern. — Führt ein Urteil zu einer Nullgleichung, deren eine Seite als Teilsumme in der Nullgleichung eines andern Urteils enthalten ist, so folgt das erste Urteil aus dem zweiten, nicht aber umgekehrt. — Führen z. B. zwei Urteile gleichmässig zu $sp = 0$, so sind sie äquivalent; führte das eine zu $sp = 0$, das andere zu $sp + \bar{s}\bar{p} = 0$, so folgt das erste aus dem zweiten, nicht aber das zweite aus dem ersten.

Das Gesagte möge an einigen Beispielen erläutert werden.

1. Aus dem Urteile: $a + b = (a + b)e$ folgt das Urteil $a = ae$. Denn das 1. Urteil führt zur Nullgleichung $a\bar{e} + b\bar{e} = 0$; das 2. Urteil gibt: $a\bar{e} = 0$. Man sieht, die zweite Nullgleichung ist in der ersten enthalten, also auch das zweite Urteil im ersten.

Uebersetzt man das Ganze aus den Zeichen in die gewöhnliche Sprache, so habe ich: Aus dem Urteile »Jedes Wesen, das a oder b ist, ist e« folgt:



»Jedes a ist e«, d. h. ich kann im Subjekte stets einen Summanden (b) unterdrücken, ohne ein falsches Urteil zu bekommen. — Aehnlich sagt das 1. Aequivalenzgesetz: Aus $a = abc$ folgt $a = ab$; in Worten: Aus dem Urteile: »Jedes a ist b und c« folgt: »Jedes a ist b« d. h. ich kann im Prädikate stets einen Faktor (c) unterdrücken, ohne ein falsches Urteil zu bekommen.

2. Die Urteile $ae = aei$ und $a = a(i + \bar{e})$ sind äquivalente. Denn sie führen beide zur Nullgleichung $ae\bar{\imath} = 0$.

Ich kann also in einem Urteile einen Faktor im Subjekt als Summanden ins Prädikat übertragen; nur muss der transferierte Begriff negiert werden. Sind z. B. alle gefiederten (e) Wirbeltiere (a) Vögel (i) d. h. $ae = aei$, so sind alle Wirbeltiere Vögel oder nicht gefiedert d. h. $a = a(i + \bar{e})$.

Ebenso sind die Urteile $a = a(e + i)$ und $a\bar{\imath} = ae\bar{\imath}$ äquivalent. Denn sie führen beide zur Nullgleichung $a\bar{e}\bar{\imath} = 0$. — Ich kann also einen Summanden aus dem Prädikate als Faktor ins Subjekt versetzen, nur muss er dabei negiert werden. Sind z. B. alle Pflanzen Kryptogamen oder Gefässpflanzen, so sind alle Pflanzen, die nicht Gefässpflanzen sind, kryptogam.

Man kann oft beide Uebertragungen verbinden, z. B. wenn alle warmblütigen Wirbeltiere Säugetiere oder Vögel sind, so sind alle Wirbeltiere, die nicht Vögel sind, Säugetiere oder nicht warmblütig. Man kann auf diese Weise Subjekt und Prädikat vertauschen. Aus dem eben angeführten Urteile wird dann: Alle Wesen, die weder Säugetiere noch Vögel sind, sind nicht warmblütige Tiere oder nicht Wirbeltiere; man sieht, es ist das die Kontraposition des ersten Urteils, wie die Logik sagt. — Man kann ausserdem noch in den mannigfaltigsten Kombinationen neue Urteile bilden, die alle dem ersten äquipollent sind*).

3. Die 6 Urteile

$$a = e\bar{\imath} + \bar{e}i \qquad \bar{a} = ei + \bar{e}\bar{\imath}$$
$$e = a\bar{\imath} + \bar{a}i \qquad \bar{e} = ai + \bar{a}\bar{\imath}$$
$$i = a\bar{e} + \bar{a}e \qquad \bar{\imath} = ae + \bar{a}\bar{e}$$

sind äquivalent.

Denn sie führen alle zur Nullgleichung:

$$aei + a\bar{e}\bar{\imath} + \bar{a}e\bar{\imath} + \bar{a}\bar{e}i = 0.$$

Nennen wir z. B. alle Dreiecke, die keinen rechten Winkel enthalten, schiefwinkelig (a), die, welche einen Winkel von 90 Grad oder mehr enthalten, grosswinkelig (e), die, welche keinen Winkel von mehr als 90 Grad enthalten, kleinwinkelig (i), so sind alle schiefwinkeligen Dreiecke grosswinkelig und nicht kleinwinkelig oder kleinwinkelig und nicht grosswinkelig;

*) Das Beispiel ist von Peirce.

ebenso umgekehrt. Es ist also $a = e\bar{\imath} + \bar{e}i$. Es gelten also auch alle übrigen 5 Gleichungen, wie man sich leicht durch Bildung der betreffenden Urteile überzeugen kann *).

4. Die beiden Urteile $a = a(e + i)$ und $ai = aie$ sind in ihrer Vereinigung äquivalent mit' dem Urteile $a = ae$. — Denn dieses letzte Urteil gibt die Nullgleichung $a\bar{e} = 0$. Die beiden andern Urteile geben $a\bar{e}\bar{\imath} = 0$ und $a\bar{e}i = 0$. Vereinigt man sie, so hat man: $a\bar{e}\bar{\imath} + a\bar{e}i = a\bar{e} = 0$, man erhält also dieselbe Nullgleichung. — Hat man z. B. jeder Rhombus (a) ist Parallelogramm (e) oder Kreisviereck (i) und jedes rhombische Kreisviereck ist ein Parallelogramm, so folgt: jeder Rhombus ist ein Parallelogramm. Das Beispiel ist zum Vexieren geeignet **).

## XVIII. Allgemeiner Gebrauch des Algorithmus zu Einteilungen.

Will man einen Begriff a nach den Merkmalen e und i einteilen, so schreibe man: $a = a(e + \bar{e})(i + \bar{\imath})$. Durch Ausführung der Multiplikation erhält man: $a = aei + ae\bar{\imath} + a\bar{e}i + a\bar{e}\bar{\imath}$. In Worten: Alle a zerfallen in vier Klassen; einige besitzen die Merkmale a und i, einige sind e aber nicht i etc. Diese Klassen schliessen einander aus, weil sie kontradiktorische Merkmale haben, z. B. $aei$ und $ae\bar{\imath}$ werden durch die Merkmale i und $\bar{\imath}$ gesondert.

## XIX. Beleuchtung der Konversion und Opposition der Urteile.

1. a) Man hat das Urteil: Kein Mensch (s) ist unsterblich (p). Man bilde: $s = s\bar{p}$; also $sp = 0$. Wenn man nun aus $sp = 0$ ableitet: Kein s ist p (Kein Mensch ist unsterblich), so kann ich mit demselben Rechte sagen: Kein p ist s (Kein unsterbliches Wesen ist Mensch). Denn der Ausdruck $sp = 0$ enthält keinen Grund, warum s eher Subjekt sein soll als p. Man kann also das allgemeine negative Urteil konvertieren.

b) Man hat das Urteil: Einige Menschen (s) sind weiss (p). Man bilde: $sp > 0$. Offenbar kann ich aus diesem Ausdrucke mit gleichem Rechte ablesen: Einige s sind p, und: Einige p sind s. Mithin ist das besondere affirmative Urteil konvertierbar.

c) Man hat das Urteil: Alle Menschen (s) sind sterblich (p). Man bilde: $s\bar{p} = 0$. Aus diesem Ausdrucke kann ich mit gleichem Rechte ablesen: Kein s ist ein Nicht-p (alle s sind p) und: Kein Nicht-p ist ein s (jedes Nicht-p ist ein Nicht-s). Mithin kann man das allgemeine affirmative Urteil kontraponieren.

*) Das Beispiel ist von Jevons.
**) Die Aufgabe ist von Peirce.



d) Man hat das Urteil: Einige Menschen (s) sind nicht weiss (p). Man bilde: $s\bar{p} > 0$. Jeder sieht, dass man gleich gut sagen kann: Einige s sind Nicht-p, und: Einige Nicht-p sind s. Das besondere negative Urteil wird kontraponiert.

2. a) Man sucht das Kontradiktorium des Urteils: Alle Menschen (s) sind sterblich (p). Man hat $s\bar{p} = 0$. Das Kontradiktorium ist: $s\bar{p} > 0$ d. h. einige Menschen sind nicht sterblich. In ähnlicher Weise findet man das Kontradiktorium zu allen andern Urteilen.

Mit Hilfe der Rechnung kann man auch leicht das Kontradiktorium komplizierter Ausdrücke finden. Wenn man hat: $ab + cd = 0$, so ist das Kontradiktorium: $ab + cd > 0$ d. h. wenigstens einer der Ausdrücke ab und cd ist nicht Null. Wenn man hat: $ab, cd = 0$ d. h. wenigstens einer der Ausdrücke ist Null, so erhält man das Kontradiktorium: $ab, cd > 0$ d. h. keiner der Ausdrücke ab und cd ist Null, sondern einige a sind b, und einige c sind d.

Wie man zu Begriffen ihr Kontradiktorium findet, lehren das dritte und vierte Negationsgesetz.

b) Man sucht das Kontrarium des Urteils: Kein Mensch (s) ist unsterblich (p). Man hat $sp = 0$. Das Kontrarium ist offenbar $sp = 1$ oder $\bar{s} + \bar{p} = 0$ d. h. alle Wesen sind Menschen und unsterblich zugleich. In der That kann man das Urteil: »Kein Mensch ist unsterblich« umformen in: Kein Wesen ist Mensch und unsterblich zugleich. Dann erhält man auch nach den gewöhnlichen Regeln der Logik den Gegensatz: Alle Wesen sind Menschen und unsterblich zugleich.

Die Logik verlangt mit Recht, dass das konträre Urteil dasselbe Subjekt bewahre mit dem gegebenen. In der Gleichung $sp = 0$ (Kein Mensch ist unsterblich) kann man also, da s unverändert bleiben muss, die Gegenstellung nicht weiter treiben, als dass man setzt $s\bar{p} = 0$ (Kein Mensch ist nicht-unsterblich, alle Menschen sind unsterblich). — Wir wollen nun das Verhältnis betrachten, in welchem der Gegensatz $s\bar{p} = 0$ zum äussersten Gegensatze $\bar{s} + \bar{p} = 0$ steht. Man hat $0 = \bar{s} + \bar{p} = \bar{s} + \bar{s}\bar{p} + s\bar{p} = \bar{s} + s\bar{p} = s\bar{p} + \bar{s}(p + \bar{p}) = s\bar{p} + \bar{s}p + \bar{s}\bar{p}$.

Der äusserste Gegensatz enthält also drei Urteile: $s\bar{p} = 0$ d. h. Alle Menschen sind unsterblich; $\bar{s}p = 0$ d. h. Alle unsterbliche Wesen sind Menschen; $s\bar{p} = 0$ d. h. Alle nicht-unsterblichen Wesen sind Menschen.

Das erste Urteil ist der gewöhnliche Gegensatz zum gegebenen Urteil: Kein Mensch ist unsterblich. Das zweite ist der Gegensatz zum konvertierten Urteil: Kein unsterbliches Wesen ist Mensch. Das Dritte ist die unechte und fehlerhafte Konversion zum gegebenen Urteil: Alle Menschen sind nicht-unsterbliche Wesen. Das Ganze ist der Gegensatz zum transformierten Urteil:

Kein Wesen ist Mensch und unsterblich zugleich. — Man sieht, dass die Urteile: »Kein Mensch ist unsterblich, Kein unsterbliches Wesen ist Mensch, Kein Wesen ist ein unsterblicher Mensch« zwar gleichwertig sind, indem das eine mit dem andern gegeben ist, aber dennoch verschiedene konträre Gegensätze bilden. Der logische Algorithmus verwischt mit dem Unterschied zwischen Subjekt und Prädikat allen Unterschied jener drei Urteile. Deshalb ist er kein geeignetes Mittel, um den Gegensatz der Urteile zu finden, wenn er auch hilft die hier in Betracht kommenden Verhältnisse allseitig zu beleuchten. Hat man aber kompliziertere Anhäufungen von Urteilen und sucht man zu ihrer Gesammtheit einen konträren Gegensatz, so wird man denselben der Kürze und Deutlichkeit halber mit dem äussersten Gegensatz identifizieren dürfen, und folglich in der Rechnung ein Mittel zu seiner Auffindung besitzen. Ueberhaupt könnte es nichts schaden, wenn die Logik bei Behandlung der Opposition der Urteile auch auf den äussersten Gegensatz einige Rücksicht nähme. Nur dürfte man nicht den konträren Gegensatz durch den äussersten verdrängen und so ein künstliches Gebilde an Stelle der Natur setzen wollen. Der äusserste Gegensatz hat für die Logik eine durchaus untergeordnete Bedeutung.

## XX. Schlussfolgerung durch logische Rechnung.

Will man aus gegebenen Urteilen mit Hilfe der logischen Rechnung eine Frage lösen, so muss man zuerst die Urteile in Gleichungen verwandeln. Hierauf verwandelt man die Gleichungen in Nullgleichungen mit Hilfe der Aequivalenzgesetze und zieht die verschiedenen Nullgleichungen in Eine zusammen. Dann evolviert man die Nullgleichung d. h. man verwandelt den Ausdruck, welcher auf der einen Seite der Gleichung, der Null gegenüber, steht, in eine evolvierte Summe. Aus der evolvierten Nullgleichung lösen sich dann alle Fragen in der leichtesten Weise.

Es kann gefragt werden, ob etwas sei, und was es sei, d. h. ich kann mich fragen, aus welchen Merkmalen etwas, z. B. a, folgt, und was aus a folgt. Auf beide Fragen kann ich aus der evolvierten Nullgleichung sofort antworten (wenn überhaupt auf Grund der gegebenen Urteile eine Antwort möglich ist). Eine solche evolvierte Nullgleichung sei: $a\,m + a\,n + \bar{a}\,r + \bar{a}\,s + m\,r + m\,s + n\,r + n\,s = 0$. Wenn ich jetzt z. B. gefragt bin, ob a sei und was es sei, so forme ich die evolvierte Nullgleichung um in: $a\,(m + n) + \bar{a}\,(r + s) = 0$, indem ich alle Glieder, die weder a noch $\bar{a}$ enthalten, weglasse. Aus der so transformierten Nullgleichung eruiere ich unter Anwendung des 1. und 2. Aequivalenzgesetzes zwei Werte für a. Ich finde $a = a\,\bar{m}\,\bar{n} = a + r + s$. Was ist also a? Antwort: a ist $\bar{m}$, aus a folgt $\bar{m}$;



denn $a = a\,\bar{m}$ (2. Interpretationsgesetz). a ist ferner $\bar{n}$. — Ist also a? Antwort: a wird sein, wenn r ist; denn $r = a\,r$ (3. Interpretationsgesetz). a wird ebenfalls sein, wenn s ist.

Nun wollen wir einige Beispiele bringen. 1. Die Begriffe a, e, i, o stehen in folgenden Beziehungen: a) wenn e ist, so können a und i nicht beide zugleich sein und auch nicht zugleich fehlen; b) wenn e nicht ist, sind a und o zugleich oder fehlen zugleich. Man fragt, unter welchen Bedingungen a sei und was aus a folge.

Auflösung. Man bilde aus den Daten die entsprechenden Gleichungen. Es sind: $e = e\,(\bar{a} + \bar{i})\,(a + i)$; $\bar{e} = \bar{e}\,(a\,o + \bar{a}\,\bar{o})$. Aus den Gleichungen ergeben sich die Nullgleichungen: $a\,e\,i + \bar{a}\,e\,\bar{i} = 0$; $a\,\bar{e}\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{e}\,o = 0$. Man schreibe die Nullgleichungen in eine zusammen und evolviere. Man hat: $a\,e\,i + a\,\bar{e}\,\bar{o} + a\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,e\,\bar{i} + \bar{a}\,\bar{e}\,o + \bar{a}\,\bar{i}\,o = 0$. Dann bringe man die Gleichung auf die Form $a\,x + \bar{a}\,y = 0$. Man hat $a\,(e\,i + \bar{e}\,\bar{o} + i\,\bar{o}) + \bar{a}\,(e\,\bar{i} + \bar{e}\,o + \bar{i}\,o) = 0$. Man wende die beiden ersten Aequivalenzgesetze an: $a = a\,(e + o)\,(\bar{e} + \bar{i})\,(\bar{i} + o) = a + e\,\bar{i} + \bar{e}\,o + \bar{i}\,o$.

Also a ist entweder e oder o, es fehlt ihm ferner entweder e oder i, es ist endlich o oder es ist nicht i. Wenn man fragt, ob und warum a sei, so antworte: a ist, wenn e ohne i ist; es ist auch, wenn o ohne e; es ist endlich, wenn o ohne i ist.

Aus der einmal entwickelten Nullgleichung findet man natürlich auch mit grösster Leichtigkeit, unter welchen Bedingungen e, i, o oder auch $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{i}$, $\bar{o}$ sind, und was aus jedem dieser Merkmale folgte.

Man hat nämlich:

$$\bar{a} = \bar{a}\,(e + \bar{o})\,(\bar{e} + i)\,(i + \bar{o}) = \bar{a} + e\,i + \bar{e}\,\bar{o} + i\,\bar{o}.$$
$$e = e\,(\bar{a} + \bar{i})\,(a + i) = e + a\,\bar{o} + \bar{a}\,o.$$
$$\bar{e} = \bar{e}\,(a + \bar{o})\,(\bar{a} + o) = \bar{e} + a\,i + \bar{a}\,\bar{i}.$$
$$i = i\,(\bar{a} + \bar{e})\,(\bar{a} + o) = i + \bar{a}\,e + \bar{a}\,o.$$
$$\bar{i} = \bar{i}\,(a + \bar{e})\,(a + \bar{o}) = \bar{i} + a\,e + a\,\bar{o}.$$
$$o = o\,(a + e)\,(a + i) = o + a\,\bar{e} + a\,i.$$
$$\bar{o} = \bar{o}\,(\bar{a} + e)\,(\bar{a} + \bar{i}) = \bar{o} + \bar{a}\,\bar{e} + \bar{a}\,\bar{i}.$$

Sehr häufig wird gefragt, was aus den ursprünglichen Daten für gewisse Begriffe unter sich folge, z. B. was für a, i und o folge. Man will also in der Antwort nichts über e wissen. Folglich ist e zu eliminieren. Das geschieht in sehr einfacher Weise. Man bringt die gegebene Nullgleichung auf die Form $e\,x + \bar{e}\,y + z = 0$. Das wird in unserm Beispiele: $e\,(a\,i + \bar{a}\,\bar{i}) + \bar{e}\,(a\,\bar{o} + \bar{a}\,o) = 0$. Dann sucht man x y. Man hat: $x\,y = (a\,i + \bar{a}\,\bar{i})\,(a\,\bar{o} + \bar{a}\,o) = a\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,o\,i$. Jetzt lasse man die Glieder der Nullgleichung, welche e oder $\bar{e}$ enthalten, einfach weg, und entwickle die Nullgleichung $x\,y + z = 0$. In unserm Beispiele hat man $x\,y + z = a\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,o\,i = 0$.

Diese Nullgleichung ist schon entwickelt. Was folgt also aus a in Beziehung auf i und o? Antwort: $a = a(\bar{\imath} + o)$ d. h. Alle a sind o oder nicht i.

2. Wenn a und i gleichzeitig fehlen, so findet sich u mit einem der Merkmale e und o, aber nicht mit beiden; wenn a und o in Abwesenheit von u gleichzeitig auftreten, so finden sich die Merkmale e und i entweder beide, oder es fehlen beide; überall, wo das Merkmal a mit dem e oder u oder mit beiden zusammen besteht, kommt auch das Merkmal i vor oder das o, aber nicht beide, und umgekehrt überall, wo von den Merkmalen i und o das eine ohne das andere wahrgenommen wird, da tritt auch das Merkmal a auf in Verbindung mit e oder mit u oder mit beiden zugleich. Es soll ermittelt werden: a) was in jedem gegebenen Falle aus der erwiesenen Gegenwart des Merkmals a in Bezug auf die Merkmale e, i und o geschlossen werden kann; b) ob irgend welche Beziehungen unabhängig von der An- und Abwesenheit der übrigen Merkmale bestehen zwischen derjenigen der Merkmale e, i o (und bejahendenfalls welche?); c) was aus dem Vorhandensein des Merkmals e folgt in Bezug auf a, i, o; und endlich d) was für a, i, o an sich folgt.

(Dieses Beispiel hat Wundt aus Schröder, dieser aus Boole genommen. Wir haben die Buchstaben a, b, c, d, e jener Autoren mit a, e, i, o, u vertauscht.)

Auflösung. Man hat die Gleichungen: $\bar{a}\,\bar{\imath} = \bar{a}\,\bar{\imath}\,u\,(e\,\bar{o} + \bar{e}\,o)$; $a\,o\,\bar{u} = a\,o\,\bar{u}\,(e\,i + \bar{e}\,\bar{\imath})$; $a\,(e + u) = i\,\bar{o} + \bar{\imath}\,o$. Daraus ergibt sich die Nullgleichung: $0 = u\,(a\,i\,o + a\,\bar{\imath}\,\bar{o}) + \bar{u}\,(a\,e\,\bar{\imath}\,o + a\,\bar{e}\,i\,o + \bar{a}\,\bar{\imath} + \bar{e}\,i\,\bar{o} + \bar{e}\,\bar{\imath}\,o) + a\,e\,i\,o + a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + \bar{a}\,e\,\bar{\imath}\,o + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{o} + \bar{a}\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{\imath}\,o$. u wird eliminiert, weil eine Antwort verlangt wird, in der u nicht vorkommt. Dadurch wird die Nullgleichung reduziert auf: $(a\,i\,o + a\,\bar{\imath}\,\bar{o})\,(a\,e\,\bar{\imath}\,o + a\,\bar{e}\,i\,o + \bar{a}\,\bar{\imath} + \bar{e}\,i\,\bar{o} + \bar{e}\,\bar{\imath}\,o) + a\,e\,i\,o + a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + \bar{a}\,e\,\bar{\imath}\,o + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{o} + \bar{a}\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{\imath}\,o = 0$. Diese Nullgleichung muss evolviert werden. Man findet: $a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + a\,i\,o + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{o} + \bar{a}\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{\imath}\,o = 0$. Die Antwort auf die erste Frage lautet: $a = a\,(\bar{e} + i + o)\,(\bar{\imath} + \bar{o})$ d. h. überall, wo a ist, sind niemals i und o vereint; sollten sie aber beide fehlen, so muss auch e fehlen.

Die Antwort auf die zweite Frage lautet: Zwischen e, i und o unter sich betrachtet besteht keine Beziehung. Denn wenn ich aus der Nullgleichung die Glieder mit a und ā wegfallen lasse, bleibt nichts übrig.

Die Antwort auf die dritte Frage lautet: $e = e\,(\bar{a} + i + o)$ d. h. wenn e vorhanden ist, muss i oder o vorhanden sein oder es fehlen beide zugleich mit a.

Die Antwort auf die vierte Frage lautet: $a\,i\,o + \bar{a}\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{\imath}\,o = 0$. Diese Gleichung drückt alle Beziehungen zwischen a, i und o aus, z. B. $a = a\,(\bar{\imath} + \bar{o}) = a + i\,\bar{o} + \bar{\imath}\,o$.

Wenn man die gegebene Nullgleichung entwickelt, ohne u zu eliminieren,



so erhält man: $a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + a\,\bar{e}\,i\,\bar{u} + a\,i\,o + a\,\bar{\imath}\,\bar{o}\,u + a\,o\,\bar{u} + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{a}\,\bar{e}\,\bar{o} + \bar{a}\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{\imath}\,o + \bar{a}\,\bar{\imath}\,\bar{u} + \bar{a}\,\bar{o}\,\bar{u} + e\,\bar{\imath}\,\bar{u} + \bar{e}\,i\,\bar{o}\,\bar{u} + \bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{o}\,u + \bar{\imath}\,o\,\bar{u} = 0$. Daraus ersieht mann, dass das Beispiel nicht ganz glücklich gewählt ist. Denn es heisst in der Aufgabe: »wenn a und o gleichzeitig auftreten in der Abwesenheit von u, so . . .«. Nun können aber a und o nie zusammen auftreten ohne u, weil aus den Daten selbst folgt $a\,o\,\bar{u} = 0$. Ferner heisst es: »wenn a und i gleichzeitig fehlen, so findet sich u mit einem der Merkmale e und o, aber nicht mit beiden«. Es müsste heissen: »wenn a und i gleichzeitig fehlen, so findet sich u stets mit e und nie mit o«; denn aus den Daten ergibt sich, dass, wo a und i fehlen, o niemals sein kann, da $\bar{a}\,\bar{\imath}\,o = 0$.

3. Die Denkobjekte a, e, i und o sind folgenden Bedingungen unterworfen. a) Wo a und e verbunden sind, da ist entweder i oder o vorhanden, aber beide nicht gleichzeitig. b) Wo e und i verbunden sind, da sind a und o entweder beide vorhanden oder beide abwesend. c) Wo a und e beide abwesend sind, da sind i und o ebenfalls beide abwesend, und ebenso umgekehrt. Es soll bestimmt werden, in welchen Beziehungen a, e und i zu einander stehen. (Das Beispiel findet sich bei Wundt; nur sind die Buchstaben a, e, i, o mit x, y, z, v vertauscht.)

Auflösung. Nach der Elimination von o bleibt die Nullgleichung: $a\,e\,i + \bar{a}\,\bar{e}\,i = 0$. Dieselbe enthält die Antwort auf die gestellte Frage. So ist $a = a\,(\bar{e} + \bar{\imath}) = a + \bar{e}\,i$. Wundt findet: $a = \bar{e}\,i + a\,\bar{e}\,\bar{\imath}$. Dieses Resultat ist nicht richtig. Es müsste heissen: $a = \bar{e}\,i + a\,\bar{e}\,\bar{\imath} + a\,e\,\bar{\imath}$. Auch in andern Punkten ist die Rechnung Wundts fehlerhaft.

Evolviert man die Nullgleichung, ohne o zu eliminieren, so findet man: $a\,e\,i + a\,e\,\bar{o} + a\,\bar{\imath}\,\bar{o} + \bar{a}\,\bar{e}\,i + \bar{a}\,\bar{e}\,o + \bar{a}\,i\,o + e\,i\,o + e\,\bar{\imath}\,\bar{o} = 0$. Daraus sieht man, dass auch dieses Beispiel nicht glücklicher gebildet ist, als das vorhergehende. Denn wo a und e verbunden sind, da ist niemals i, sondern stets o. Wo e und i verbunden sind, da fehlen stets a und o.

4. Zwischen den Objekten a, e, i, o bestehen folgende Relationen: a) Wenn e und o gleichzeitig sind, so findet sich auch a ein. b) Wenn e fehlt, so fehlen auch a und i oder sie sind beide zugleich. c) Wenn o abwesend ist, sind a und i niemals vereinigt. Unter welchen Bedingungen ist a, und welche Merkmale sind mit ihm vereinigt?

Auflösung: $a\,\bar{e}\,\bar{\imath} + a\,\bar{e}\,\bar{o} + a\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,e\,o + \bar{a}\,\bar{e}\,i + \bar{a}\,i\,o + \bar{e}\,i\,\bar{o} = 0$. Also $a = a\,(e + i)\,(e + o)\,(\bar{\imath} + o) = a + e\,o + \bar{e}\,i + i\,o$. Also a muss z. B. sein, wenn i und o zugleich sind.

5. Wenn a und e zugleich sich vorfinden, fehlt u. Wenn a sich einstellt ohne e, so fehlt auch i; wenn hingegen e sich findet ohne a, so stellt i sich ein und auch u. Unter welchen Bedingungen wird i sein, und welches sind seine Merkmale?

Auflösung: $a\,e\,u + a\,\bar{e}\,i + a\,i\,u + \bar{a}\,e\,\bar{\imath} + \bar{a}\,e\,\bar{u} + e\,\bar{\imath}\,u = 0$. Also $i = i\,(\bar{a} + e)\,(\bar{a} + \bar{u}) = i + \bar{a}\,e + e\,u$. Wenn mithin z. B. e und u zugleich sich finden, ist auch i. Wenn i ist, sind a und u nie zugleich.

Anmerkung. 1. Wenn bei Daten, welche auf die Merkmale a, e, i, u... sich beziehen, eine kompliziertere Frage gestellt wird, z. B. was folge, wenn $a\,e + \bar{\imath}\,u$ ist, so verfährt man in folgender Weise: Man setzt $a\,e + \bar{\imath}\,u = m$. Diese Gleichung fügt man den Daten bei, und berechnet m in derselben Weise, wie man a oder i oder sonst einen Begriff berechnen würde.

2. Man könnte die logischen Gleichungen auch lösen, indem man der Einsgleichung dieselbe Rolle zuwiese, welche jetzt die Nullgleichung hat. Doch das überlassen wir dem Leser.

## XXI. Einteilung der Begriffe mit Hilfe der Nullgleichung.

Man kann auch die entwickelte Nullgleichung zur Klassifikation der in ihr enthaltenen Begriffe benutzen. Aus der Gleichung: $a\,e + \bar{a}\,i + u = 0$ erhalte ich $a = a + i$. Dafür kann ich auch schreiben: $a = a\,\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u} + i$. Denn aus der Nullgleichung habe ich $a = a\,\bar{e}$ und $\bar{u} = 1$. Für $a + i$ kann ich also schreiben $a\,\bar{e}\,\bar{u} + i$. Es ist aber $a\,\bar{e}\,\bar{u} + i = a\,\bar{e}\,\bar{u}\,\bar{\imath} + a\,\bar{e}\,\bar{u}\,i + i = a\,\bar{e}\,\bar{u}\,\bar{\imath} + i$. Es ist also in der That $a = a + i = a\,\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u} + i$. Die Klasse a besteht also aus der Klasse i und einigen $\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u}$.

Hätten wir in der Gleichung $a = a\,\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u} + i$ statt i und $\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u}$ komplizierte Ausdrücke, so müsste man sowohl i als $\bar{e}\,\bar{\imath}\,\bar{u}$ nach den früher aufgestellten Regeln in eine reduzierte Summe verwandeln. Da die Reduktion der Summen oft zu mehreren gleichberechtigten Ausdrücken führt, kann man mit jener Methode zu verschiedenen Einteilungen desselben Begriffes gelangen. — Auch sind die sich ergebenden Klassen für gewöhnlich nicht disjunkt.

Anmerkung. Ein anderes Verfahren den Begriff i nach a, e, u einzuteilen wäre folgendes: Man schreibt $i = i\,(a + \bar{a})\,(e + \bar{e})\,(u + \bar{u})$, führt die Multiplikation aus und streicht die Glieder weg, welche nach Ausweis der Nullgleichung unmöglich sind. So ist die Einteilung stets eindeutig bestimmt, und alle sich ergebenden Glieder sind disjunkt. Man vergleiche, was wir in Abschnitt XVIII gesagt haben.

### Beispiel.

Aus der evolvierten Nullgleichung $a\,\bar{e}\,\bar{\imath} + a\,\bar{e}\,\bar{o} + a\,i\,\bar{o} + \bar{a}\,e\,o + \bar{a}\,\bar{e}\,i + \bar{a}\,i\,o + \bar{e}\,i\,\bar{o} = 0$ soll man eine Einteilung des Begriffes a herleiten.

Auflösung. Ich habe: $a\,(\bar{e}\,\bar{\imath} + \bar{e}\,\bar{o} + i\,\bar{o}) + \bar{a}\,(e\,o + \bar{e}\,i + i\,o) + \bar{e}\,i\,\bar{o} = 0$. Also ist $a = a\,(e + i)\,(e + o)\,(\bar{\imath} + o)\,(\bar{e} + \bar{o})\,(e + \bar{\imath})\,(\bar{\imath} + \bar{o})\,(e + \bar{\imath} + o) + e\,o + \bar{e}\,i + i\,o$. In dem Koeffizienten von a kann man den Faktor



$(e + \bar{\imath} + o)$ nach dem zweiten Absorptionsgesetz weglassen. Führt man dann die Multiplikation der sechs andern Faktoren aus, so haben wir $a = a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + e\,o + \bar{e}\,i + i\,o$. Man müsste jetzt den Ausdruck $e\,\bar{\imath}\,\bar{o}$ in eine reduzierte Summe verwandeln; er ist aber schon reduziert. Es erübrigt, dass man die bereits evolvierte Summe $e\,o + \bar{e}\,i + i\,o$ reduziere. Die Reduktion ergibt: $e\,o + \bar{e}\,i$. Mithin haben wir schliesslich: $a = a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o} + e\,o + \bar{e}\,i$ d. h. die Klasse a besteht aus den Klassen $e\,o$ und $\bar{e}\,i$ und aus einigen Individuen der Klasse $e\,\bar{\imath}\,\bar{o}$.

Bei einer solchen Einteilung ist das Glied $a\,e\,\bar{\imath}\,\bar{o}$, d. h. einige $e\,\bar{\imath}\,\bar{o}$, wegen seiner Unbestimmtheit unangenehm. Doch haben wir es so viel wie möglich determiniert. Wir haben ihm die Merkmale gegeben, welche jedes a hat, nämlich die Merkmale $e + i$, $e + o$ und $\bar{\imath} + o$; dazu haben wir gefügt das Merkmal, welches jedes Wesen haben muss, nämlich $e + \bar{\imath} + o$ (es ist ja $e + \bar{\imath} + o = 1$, dieses Merkmal kommt also jedem Wesen zu); endlich haben wir es durch den Gegensatz zu dem bestimmten $e\,o + \bar{e}\,i + i\,o$ determiniert, indem wir ihm das Merkmal $(\bar{e} + \bar{o})\,(e + \bar{\imath})\,(\bar{\imath} + \bar{o})$ beilegten. Es würde auch genügt haben, ihm das Merkmal $(\bar{e} + \bar{o})\,(e + \bar{\imath})$ beizulegen, da damit ja ohnehin das Merkmal $\bar{\imath} + \bar{o}$ nach dem vierten Absorptionsgesetze gegeben ist.

## XXII. Die logische Rechnung und der Syllogismus.

Der Syllogismus beruht darauf, dass aus zwei Urteilen, die einen Terminus m gemein haben, ein drittes abgeleitet wird, in welchem jener Terminus eliminiert ist. Es handelt sich also darum, aus zwei Nullgleichungen mit dem Terminus m oder $\bar{m}$ eine dritte abzuleiten, die m nicht enthält; oder (wir können nämlich die beiden Nullgleichungen in eine zusammenziehen) es handelt sich darum, den zwei Summanden einer Summe, die gleich Null ist, einen dritten impliciten Summanden beizufügen, der natürlich ebenfalls Null ist. Das kann aber nur geschehen, wenn in der einen Gleichung m und in der andern $\bar{m}$ steht (resp. wenn der eine Summand m und der andere $\bar{m}$ enthält). Denn z. B. aus $s\,m = 0$ und $p\,\bar{m} = 0$ folgt $s\,p = 0$ (oder aus $s\,m + p\,\bar{m} = 0$ folgt durch Evolution der linken Seite $s\,m + p\,\bar{m} + s\,p = 0$. Aus $s\,m = 0$ und $p\,m = 0$ folgt aber nichts. Hieraus ergeben sich leicht alle Modi des Syllogismus, welche eine allgemeine Konklusion haben.

Barbara: $\bar{p}\,m = 0$; $s\,\bar{m} = 0$; also $s\,\bar{p} = 0$
Celarent und Cesare: $p\,m = 0$; $s\,\bar{m} = 0$; also $s\,p = 0$
Camestres und Calemes: $p\,\bar{m} = 0$; $s\,m = 0$; also $s\,p = 0$.

Anmerkung. 1. Die Syllogismen mit partikulärer Konklusion sind auch leicht in Zeichen zu erläutern. Ein Beispiel möge genügen:

Darii: $m = mp$; $sm > 0$; d. h. $0 < sm = smp$; also $0 < sp$.

Vgl. XVI, 10.

2. In ähnlicher Weise hätte man auch die Syllogismen mit allgemeiner Konklusion darstellen können, z. B.:

Barbara: $m = mp$; $s = sm$; d. h. $s = sm = smp$; also $s = sp$.

Vgl. XIII, 2.

3. Es kann auch jetzt keine Schwierigkeit mehr machen, folgenden Syllogismus in Zeichen darzustellen: Wenn a das Merkmal b hat, so hat c das Merkmal d; nun hat aber a das Merkmal b; also hat c das Merkmal d. — Man bezeichnet mit m den Fall, dass das a das Merkmal b hat, und mit s den Fall, dass c das Merkmal d hat. Dann habe ich:

$m = ms$; $m = 1$; d. h. $1 = m = ms$; also $s = 1$. Vgl. XIII, Zusatz.

Aehnlich erledigt sich das Beispiel: Wenn a das Merkmal b hat, so hat c das Merkmal d; nun hat aber e nicht das Merkmal d; also hat a nicht das Merkmal b. — Wir haben:

$$m = ms;\ s = 0;\ \text{also}\ m = ms = m0 = 0.$$

## XXIII. Vorzüge unseres Verfahrens zur Lösung gestellter Aufgaben.

Wir erhalten für einen Begriff a stets drei Werte (Vgl. XX und XXI). Der eine hat die Form $a = amn$; der andere: $a = a + m + n$; der dritte: $a = amn + r + s$. Wir wollen diese drei Ausdrücke betrachten.

1. Die Gleichung $a = amn$ sagt uns, was aus der Gegenwart von a für Folgerungen sich ergeben; es folgt nämlich die Gegenwart von m und n.

Wenn man nun nach unserer Methode aus den Daten die Frage löst, was aus a folgt, so erhält man erstens eine vollständige Antwort. Aus der Gegenwart von a folgt weiter nichts als m und n. Denn würde auch die Gegenwart von x folgen, so hätte ich $a = ax$ d. h. $a\bar{x} = 0$. Es müsste also in der Nullgleichung der Summand $a\bar{x}$ vorkommen, da ja die Nullgleichung, aus der wir die Frage lösten, evolviert war. Der Summand $a\bar{x}$ stand aber nicht dort. Denn sonst hätte ich gefunden $a = amnx$. Aus den Daten folgt also weiter nichts für a, als dass es stets mit m und n sich verbindet.

Unsere Antwort hat auch eine passende Form. Sie ist ein Produkt aus einfachen Faktoren. Ich kann die totale Folgerung bequem in Teilfolgerungen zerlegen, wenn das mir aus irgend einem Grunde gefällt. Ich kann nämlich sagen: Wenn a ist, ist m und n; ich kann auch sofort die Teilfolgerung ablesen: Wenn a ist, so folgt, dass n ist.



2. Die Gleichung $a = a + m + n$ gibt an, unter welchen Bedingungen ich auf die Gegenwart von a schliessen kann. a wird nämlich sein, wenn m oder n ist.

Auch diese Antwort ist eine vollständige. Aus keiner andern Bedingung kann ich auf die Gegenwart von a schliessen. Denn wäre die Gegenwart von x ein Zeichen der Gegenwart von a, so hätte ich $x = ax$ d. h. $\bar{a}x = 0$. Es müsste also in der Nullgleichung der Summand $\bar{a}x$ vorkommen, da ja die Nullgleichung, aus der wir die Frage lösten, evolviert war. Der Summand $\bar{a}x$ stand aber nicht dort; denn sonst hätte ich gefunden $a = a + m + n + x$. Aus den Daten folgt also keineswegs, dass die Gegenwart von x diejenige von a mit sich bringe.

Die Antwort hat ferner eine passende Form. Sie ist eine Summe aus einfachen Summanden. Ich kann die allgemeine Bedingung für die Gegenwart von a bequem in Teilbedingungen zerlegen, welche auch einzeln genommen das Eintreten von a verlangen. Ich kann nämlich sagen: a wird sein, wenn m oder n ist; ich kann auch sofort eine Teilbedingung ablesen, z. B. a wird sein, wenn m ist.

3. Die Gleichung $a = amn + r + s$, zu welcher wir im Abschnitt XXI gelangten, gibt uns eine möglichst einfache Einteilung von a nach den in der Nullgleichung enthaltenen Merkmalen. Die Gleichung besagt: Die Klasse a besteht aus der Klasse r, der Klasse s und aus einigen Individuen der Klasse mn. In dieser Einteilung ist das Glied amn lästig wegen seiner Unbestimmtheit. Doch leistet unsere Antwort alles, was auf Grund der gegebenen Daten geleistet werden kann.

Das unbestimmte Glied amn ist möglichst beschränkt. Denn es enthält nichts, was bereits in $r + s$ enthalten ist. Es besitzt nämlich, wie sich aus der Ableitung in XXI ergibt, das Merkmal $\bar{r}\bar{s}$. — Ferner ist das bestimmte Glied $r + s$ möglichst ausgedehnt, denn es enthält, wie sich aus der Ableitung ergibt, den ganzen Umfang der Klassen, welche auf Grund der Daten, als in a enthalten, erkannt werden können.

So ist also amn möglichst beschränkt, weil $r + s$ möglichst gross ist, und amn nichts enthält, was in $r + s$ bereits liegt. Dieses Glied amn ist aber auch, so viel wie möglich, determiniert. Es besitzt nämlich alle Merkmale von a, die sich aus den Daten ergeben, sowie alle Merkmale, welche auf Grund der Daten jedes Wesen besitzen muss. Es ist auch determiniert durch seinen Gegensatz zum Gliede $r + s$. Es kann dabei vorkommen, dass das Glied amn Null wird und ganz wegfällt. Z. B. wenn ich in Abschnitt XX im 2. Beispiele nach der Elimination von u die Einteilung von a suche, so finde ich $a = \bar{e}\bar{\imath} + i\bar{o} + o\bar{\imath} = \bar{e}\bar{o} + i\bar{o} + o\bar{\imath}$.

Endlich sind beide Glieder, r + s sowohl wie a m n, möglichst e i n - f a c h, weil sie reduzierte Summen sind.

4. Dazu kommt, dass bei unserm Verfahren, nachdem einmal die evolvierte Nullgleichung vorliegt, alle möglichen Fragen mit erstaunlicher Leichtigkeit beantwortet werden können. Die evolvierte Nullgleichung ist überhaupt ein ausgezeichnetes Mittel, sich die kompliziertesten Relationen mehrerer Begriffe in einfachster Weise klar zu veranschaulichen.

Anmerkung. Da die Autoren, welche bisher über den Logikkalkül schrieben, die Evolution und Reduktion der Summen nicht behandelt und benutzt haben, so konnte ihre Lösung logischer Gleichungen nur mangelhaft und unvollkommen sein. Ihr Verfahren entbehrte auch mehr oder minder eines leitenden Princips. Man sieht sie deshalb oft ohne festbestimmten Plan unruhig voranrechnen, ohne recht zu wissen, wohin. Unsere Rechnung dagegen ist sich bei jeder Frage sofort über den einzuschlagenden Weg klar und schreitet direkt und zielbewusst auf die Lösung hin.

## XXIV. Verschiedene Fragen.

1. F r a g e. Wäre es nicht wünschenswert, der logischen Addition eine Subtraktion gegenüberzustellen und der Multiplikation eine Division, wie solches in der Zahlenlehre geschieht?

Antwort. Die logische Subtraktion ist nichts anderes, als eine Multiplikation des Minuenden mit dem Kontradiktorium des Subtrahenden, z. B. $a - e = a\bar{e}$. Denn wenn $a - e = x$, so folgt aus dem Begriffe der Subtraktion $a = e + x$. Hieraus folgt aber nach den Gesetzen der logischen Rechnung $e = ae$. Also beim Subtrahenden kann für die Subtraktion nur der Teil in Betracht kommen, welcher ihm mit dem Minuenden gemeinsam ist; der andere Teil $\bar{a}e$ muss vernachlässigt werden. Jetzt ist $a - e = a - ae = a\bar{e} + ae - ae$. Soll aber der letzte Ausdruck überhaupt etwas bedeuten, so muss er gleich $a\bar{e}$ sein d. h. $a - e = a\bar{e}$ q. e. d.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen $a : e = a + \bar{e}$ d. h. die logische Division besteht darin, dass man zum Dividenden das Kontradiktorium des Divisors addiert.

Es lässt sich also ausser der Addition und Multiplikation (und Negation) keine weitere logische Operation finden. Die Bemühungen Ernst Schröders *), eine logische Subtraktion und Division zu begründen, sind aussichtslos und gegenstandslos. Die logische Multiplikation und Addition stehen im Verhältnis gegenseitiger Inversion. Will man z. B. in der Gleichung $a = e + i$

*) Operationskreis S. 28 ff.



das Zeichen i auf die linke Seite schaffen, so multipliziere man etwa beiderseits mit $\bar{i}$ und addiere dann beiderseits $ei$; man erhält $a\bar{i} + ei = e$ d. h. die Gesamtheit der e besteht aus der Klasse $a\bar{i}$ und einigen i. — Dass es keine logische Potenzierung geben kann, erhellt, weil $a . a . a . . = a$.

A n m e r k u n g. Wie man in der Algebra die inversen Operationen in eine einzige zusammenfasst, indem man $a - b$ als Summe $a + (-b)$ und $\frac{a}{b}$ als Produkt $a . \frac{1}{b}$ ansieht, so lassen sich auch die logische Addition und Multiplikation, eben weil sie zu einander invers sind, auf Eine Operation zurückführen. Man kann nämlich jede Addition als eine Multiplikation ausdrücken, indem man z. B. statt $a + e$ schreibt $\bar{a}\bar{e}$. — Diese Beziehung zwischen Addition (Begriffserweiterung, Generalisierung) und Multiplikation (Begriffsverengung, Spezifizierung) und Negation ist gewiss interessant. Ohne den logischen Algorithmus würde man aber kaum darauf geachtet haben.

2. F r a g e. Warum bezeichnet man die Gesamtheit der Dinge, welche a und e sind, unter Zuhilfenahme des mathematischen Additionszeichens, und nicht etwa durch das Zeichen der Multiplikation oder sonstwie?

Antwort. Ich finde besonders folgende Gründe:

a) Wenn disjunkte Begriffe logisch addiert werden, so nimmt der Umfang der Summe in ähnlicher Weise zu, wie es bei der mathematischen Addition von Grössen geschieht.

b) Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass a eintrete, $\alpha$ und die Wahrscheinlichkeit, dass b eintrete, $\beta$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass a oder b eintrete, (falls a und b nicht teilweise identisch sind) nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung $\alpha + \beta$. Es ist also ganz zutreffend, das entsprechende Ereignis $a + b$ zu nennen.

Indes ist die logische Addition von der mathematischen ihrem Begriffe und ganzen Wesen nach durchaus verschieden, und man darf nicht von geltenden mathematischen Sätzen logische Additionsregeln ableiten wollen. Diese Verschiedenheit zeigt sich besonders in dem für die logische Addition geltenden Distributionsgesetz und darin, dass $a + a = a$.

3. F r a g e. Warum bezeichnet man die Gesamtheit der Dinge, welche a und e sind, unter Zuhilfenahme des mathematischen Multiplikationssymbols?

Antwort. Ich finde besonders folgende Gründe:

a) Die logische Multiplikation ähnelt der mathematischen durch ihr Kommutations- und Distributionsgesetz. Diese Gesetze gelten zwar auch für die logische Addition; aber, da aus den angeführten Gründen die Erweiterung der Begriffe als Addition gesetzt wird, so erübrigt, dass man wenigstens die Determination der Begriffe wegen jener beiden Gesetze als Multiplikation darstelle.

b) Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass a eintrete, $\alpha$ und die Wahrscheinlichkeit, dass b eintrete, $\beta$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass a und b eintrete, (falls es sich wirklich um verschiedene Ereignisse handelt, die sich nicht gegenseitig bedingen) nach dem Probabilitätskalkül $\alpha\,\beta$. Es ist aber ganz entsprechend ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit ein Produkt der Teilwahrscheinlichkeiten ist, als ein Produkt der Teilereignisse zu bezeichnen.

Nichtsdestoweniger ist die logische Multiplikation von der mathematischen ihrem ganzen Wesen nach verschieden. Dies zeigt sich besonders darin, dass die logische Multiplikation den Umfang des Multiplikanden nie vergrössert, und dass $a \,.\, a = a$ ist.

4. Frage. Warum bezeichnet man das Seiende mit der Zahl 1, das Nicht-Seiende mit der Zahl 0?

Antwort. Ich finde folgende Gründe:

a) Die mathematische Null bezeichnet naturgemäss ein Nicht-Sein, wie z. B. null Aepfel das Nicht-Sein der Aepfel bedeuten. Dann ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Probabilität für ein unmögliches Ereignis 0. Treffend nennt deshalb die logische Zeichensprache das betreffende Ereignis selbst 0. — Umgekehrt ist in der Mathematik die Wahrscheinlichkeit eines notwendigen Ereignisses 1; deshalb belegt der logische Algorithmus passend das Merkmal, welches nie fehlen kann und notwendig sich einstellt, mit dem Zeichen 1.

b) Andere Gründe ergeben sich aus folgenden Gleichungen, die eben so in der Mathematik, wie in der Logik, gelten: $a \,.\, 1 = a$; $a : a\,(= a + \bar{a}) = 1$; $a + 0 = a$; $a \,.\, 0 = 0$; $a - a\,(= a\,\bar{a}) = 0$. Ferner $a - 0\,(= a \,.\, 1) = a$; $a : 1\,(= a + 0) = a$; $1 \,.\, 0 = 0$.

Man sieht, dass das Zeichen 0 durch mehr Gründe verteidigt wird, als 1. Denn obwohl 1 vorzuziehen ist, macht ihm doch in etwas das Zeichen $\infty$ den Platz streitig. Denn da der Umfang des Seienden grenzenlos ist, könnte man ihn passend mit $\infty$ bezeichnen. Es würden auch mathematische Analogien nicht fehlen: $\infty + a = \infty$; $\infty : a\,(= \infty + \bar{a}) = \infty$.

## XXV. Wissenschaftlicher Wert des logischen Algorithmus.

1. Der logische Kalkül verdient wie jedes wissenschaftliche Gebiet, um seiner selbst willen ein gewisses Interesse. Der menschliche Geist fühlt sich zu aller Wahrheit hingezogen. Mit der Wahrheit aber findet er Gott, das Fundament aller Wahrheit.

2. Der logische Kalkül ist ein treffliches Mittel, den äussern Fomalismus der Logik zu erklären und zu verdeutlichen. Man mag sich seiner bedienen bei der Lehre von der Konversion und Opposition der Urteile und bei der



Lehre vom Schluss. Wenn die Logik mit Recht es nicht verschmäht, ihre Syllogismen durch die bekannten Kreisfiguren zu erläutern, so wird sie sich gewiss zu ähnlichen Zwecken mit Nutzen des Logikkalküls bedienen. Es mag zuweilen ganz erwünscht sein, das verwickelte Verhältnis mehrerer Begriffe durch eine evolvierte Nullgleichung veranschaulichen zu können.

3. Der Logikkalkül bringt uns gewisse elementare Wahrheiten zum Bewusstsein, gewisse mehr oder weniger komplizierte Aussagen und Sätze verdeutlicht er nach allen Richtungen und in allen ihren Teilen, gewisse Prinzipien kleidet er in eine Form, welche sich leicht und scharf dem Gedächtnisse einprägt. Wir brauchen nur auf die Distributions-, die Tautologie-, die Ontologie-, die Absorptions- und Interpretationsgesetze hinzuweisen. In jeder Wissenschaft ist es aber von grösster Bedeutung, dass man die Fundmentalwahrheiten, so selbstverständlich sie auch sein mögen, sich klar und scharf zum Bewusstsein bringt, um auf ihnen durch geeignete Kombination das ganze System zu errichten. Hierin kann der Kalkül dem Logiker nicht unerhebliche Dienste leisten. Freilich wird dabei vorausgesetzt, dass man nicht bei der toten Rechnung stehen bleibe, sondern das ganze Verfahren aus der Zeichensprache in Urteile übersetze.

Wir wollen ein Beispiel herausheben. Gewiss hat jeder Logiker die Wahrheit, welche in der Formel $\overline{a\,e} = \bar{a} + \bar{e}$ niedergelegt ist, längst deutlich in seinem Bewusstsein ausgeprägt. Nichtsdestoweniger tritt sie schärfer hervor und behält sie sich leichter mit Hilfe der Formel. Auch ist sie in dieser Form zu den verwickeltesten Kombinationen leicht zu gebrauchen. Sie wird auch in ihrem Verhältnis zu der verwandten Wahrheit $\overline{a + e} = \bar{a}\,\bar{e}$ klar erkannt. Beide Wahrheiten verschmelzen im Geiste zu einer einzigen; sie erklären sich gegenseitig; sie rufen sich gegenseitig ins Bewusstsein zurück.

4. Der Kalkül führt auch zu neuen Resultaten, welche den Logiker interessieren müssen. Wir verweisen besonders auf das Dualilätsgesetz und auf das zweite Funktionsgesetz.

5. Doch darf man nicht vergessen, dass die Rechnung an der äussersten Oberfläche stehen bleibt und gar nicht in das Wesen der Dinge eindringt. Der Algorithmus kennt nichts als Merkmale. Er unterscheidet nicht wesentliche Merkmale von den Accidentien, nicht Genus und spezifische Differenz, nicht Proprietät und Accidens. Alle fünf Prädikabilien sind für die Rechnung nur eine gleichförmige Masse. Da muss man zusehen, besonders heutzutage, dass man nicht vor lauter Mathematik das Wesen der Dinge vergisst, stets an der Oberfläche herum seine Messungen anstellt und nie in das philosophische Innere eindringt, stets die Quantität beschaut, ohne an die tragende Substanz zu denken.

Wenn ferner die Rechnung alle Urteile als Quantitätsvergleichung zwischen

der Klasse des Subjekts und des Prädikats fasst, so muss man sich hüten zu glauben, alle Urteile vollzögen sich auch in unserer Seele als Gleichungen. Das gilt nicht einmal von den Subsumtionsurteilen. Und dazu sind die wenigsten Urteile Subsumtionen; denn wenn ich sage: Dieser Mensch war bleich wie der Tod, so schwebt ganz gewiss meinem Geiste keine Klasse aller todesbleichen Wesen vor, in die ich dann jenen Menschen als individuellen Vertreter für einen bestimmten Zeitpunkt einstelle.

Wenn endlich der Algorithmus das Schliessen durch Rechnung veranschaulicht, wird sich kein vernünftiger Mensch einbilden, dass der schliessende Geist selber rechne, oder dass beim Schliessen immer eine Vergleichung von Ausdehnungsgebilden, etwa von geometrischen Figuren, stattfinde.

6. Dann darf man auch den Kalkulus nicht in verkehrter Weise gebrauchen. Es könnte z. B. jemand versuchen, mit Hilfe der Rechnung das Prinzip des Widerspruchs zu beweisen. Er könnte sagen: Nehmen wir an, zu jeder Klasse a von Dingen lasse sich eine andere b finden, so dass $a + b = 1$ und $a\,b = 0$. Dann lässt sich beweisen, dass b vollständig bestimmt ist, und dass es nicht zwei verschiedene Begriffsgebiete gibt, welche mit a die beiden Gleichungen erfüllen, d. h. wenn wir ausserdem haben $a + c = 1$, $a\,c = 0$, so ist $b = c$. Ich habe nämlich: $a + b = a + c$. Also $a\,b + b = a\,b + b\,c$ und $a\,c + b\,c = a\,c + c$. In den beiden letzten Gleichungen ist die rechte Seite der ersten gleich der linken Seite der zweiten, weil $a\,b = a\,c = 0$; d. h. es ist $a\,b + b\,c = a\,c + b\,c$. Es ist also auch $a\,b + b = a\,c + c$. Indem ich beiderseits das erste Absorptionsgesetz anwende, erhalte ich $b = c$. Ernst Schröder*) bringt nach Grassmann diesen Beweis und gibt schliesslich dieser festbestimmten Grösse $b = c$ den Namen Nicht-a. Dann fährt er fort: »Die Gleichung $a\,\bar{a} = 0$ erscheint uns jetzt als der mathematische Ausdruck des Satzes vom Widerspruch, welcher aussagt, dass nichts zu denken möglich ist, was zugleich und in demselben Sinne a und Nicht-a wäre — jenes principium contradictionis, welches Aristoteles an die Spitze des ganzen Logikgebäudes gestellt wissen wollte.« Mit diesen Worten kann unmöglich angedeutet sein, in Zukunft werde auf Grund der Entdeckung des Logikkalküls das principium contradictionis nicht mehr als Axiom an die Spitze des Logikgebäudes, sondern als ein abgeleiteter Lehrsatz in die Mitte oder gar ans Ende gestellt werden. Obige Ableitung unterstellt ja die Begriffe 1 und 0 d. h. die Begriffe des Seienden und Nicht-Seienden schon als festbestimmte; wir haben also schon den Begriff des »Nicht« als einen eindeutig bestimmten. Ferner unterstellt der Beweis, dass $a\,b + b = b$. Um dies zu beweisen, hat man: $a\,b + b = b\,(1 + a) = b \,.\, 1 = b\,(b + \bar{b})$

*) Operationskreis S. 13.



$= b \,.\, b + b\,b = b + 0 = b$. Der Satz $b + 0 = b$ besagt aber nichs anders als: Jedes b ist entweder (und dann ist es b), oder es ist nicht (und dann ist es Null. Also wird wiederum der Satz des Widerspruchs unterstellt. Ferner wie ist denn ein Beweis möglich, ohne dass man annimmt, die Prämissen seien wahr, und alles, was ihnen zuwider ist, sei falsch? Was heisst das aber anders, als fort und fort den Satz des Widerspruchs als geltend unterstellen? Zu guter letzt erinnere ich an das Wort des Aristoteles: Beweisen wollen, was unmittelbar evident ist, ist eine Lächerlichkeit. Denn wenn jemand das durch sich Bekannte durch das, was nicht durch sich bekannt ist, demonstrieren will, so ist das wahrlich ein Mensch, der nicht zu unterscheiden versteht, was unmittelbar bekannt ist und was nicht*). Es unterliegt nun keinem Zweifel, dass der Satz des Widerspruches bekannter ist, als das Axiom: »Ich kann zu jedem Begriff a einen andern b finden, so dass $a\,b = 0$ und $a + b = 1$.« Denn dieses »Axiom« wird mir erst klar, wenn ich bedenke, dass jedem a ein $\bar{a}$ entspricht, und dass $a\,\bar{a} = 0$, $a + \bar{a} = 1$ d. h. der Satz des Widerspruches ist bekannter als jenes Axiom, er darf also nicht durch dasselbe bewiesen werden. Es bleibt mithin dabei: Schröder hat den Satz des Widerspruches nicht beweisen wollen. Er wollte bloss zeigen, dass man, wenn gewisse Voraussetzungen gemacht werden, welche das principium contradictionis mehr oder weniger ausgesprochen unterstellen, mit Hilfe der Rechnung zu eben jenem Prinzip zurückkehren kann. Darin liegt nun gar nichts Sonderbares oder Ueberraschendes. Indes sind solche Untersuchungen unter Umständen ganz angebracht; denn sie manifestieren den innigen Zusammenhang der Begriffe und Axiome.

Solche Betrachtungen sind aber oft Missverständnissen und Missdeutungen ausgesetzt. Jedenfalls hat die wahre Wissenschaft ein Interesse daran, zu wachen, dass von keiner Seite her eine Begriffsverwirrung angerichtet werde. Schon aus diesem ganz sekundären Grunde mag es dem Philosophen zuweilen rathsam erscheinen, sich mit gewissen neuen Erscheinungen bekannt zu machen, damit er dem Unkraut wehre, das Brauchbare aber in den Dienst der Wahrheit stelle.

7. Endlich müssen wir uns keiner Ueberschätzung des logischen Algorithmus schuldig machen. Wir wollen ein Beispiel bringen. In seiner neuesten Algebra der Logik, S. 125, schreibt Schröder: »Gleich andern Wissenschaften dürfte auch die Logik einst ganz Ungeahntes verwirklichen und herbeiführen, dass nebenher in überraschender Weise auch unabsehbare Vorteile erzielt werden [d. h. sie wird ausser dem theoretischen Genuss uns greifbaren Gewinn bringen]. Um nur auf eines hinzudeuten, so sind seit ihrem jüngsten

*) Phys. II, 1. Ed. Becker 193 a 4.

Aufschwunge bereits drei logical machines neuerdings aufgebaut, die allerdings den ihnen beigelegten Namen noch kaum zu verdienen scheinen, die nämlich mit ihrer Leistungsfähigkeit sich noch auf einer sehr rudimentären Stufe befindlich zeigen — wie etwa der Papin'sche Topf gegenüber der Dampfmaschine. In der That aber vermag doch niemand vorauszusehen, ob nicht schon bald eine Denkmaschine konstruierbar wird, analog oder vollkommen wie die Rechenmaschine, welche dem Menschen einen sehr beträchtlichen Teil ermüdender Denkarbeit fortan abnehmen wird, gleich wie die Dampfmaschine es mit der physischen Arbeit thut.«

Vor solchen Sonderbarkeiten brauchen wir kaum zu warnen. Der Algorithmus wird die aristotelische Logik d. h. die Logik des gesunden Menschenverstandes nicht verdrängen. Sein Wert besteht darin, dass er im Stande ist dieser Logik brauchbare Handlangerdienste zu leisten. Auf dem Gebiete der Wissenschaft handelt es sich ja überhaupt nicht um Revolutionen; sondern man muss auf dem Ueberlieferten und längst Bewährten organisch weiterbauen. — Freilich findet die logische Rechnung auch manche komplizierte Gesetze, die man auf anderm Wege nicht entdeckt hätte. Diese Sätze haben ohne Zweifel ein theoretisches Interesse und dürfen dem Mann der Wissenschaft nicht unbekannt bleiben.

---

Druck von Oskar Bonde in Altenburg.

164 H75
Hontheim
Logische algorithmus.
J. Cottier 13 Ja

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
1010653570